



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

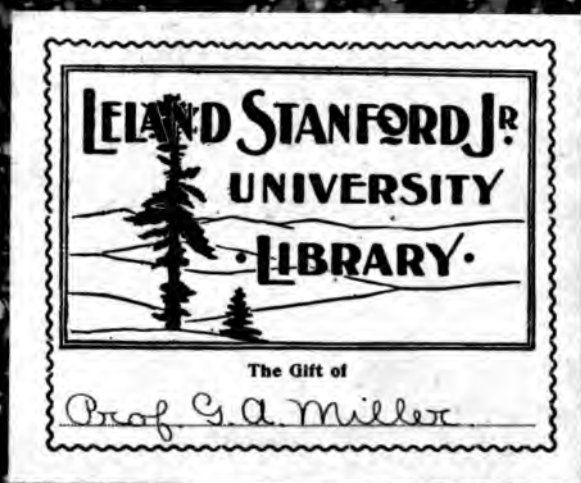
Nous vous demandons également de:

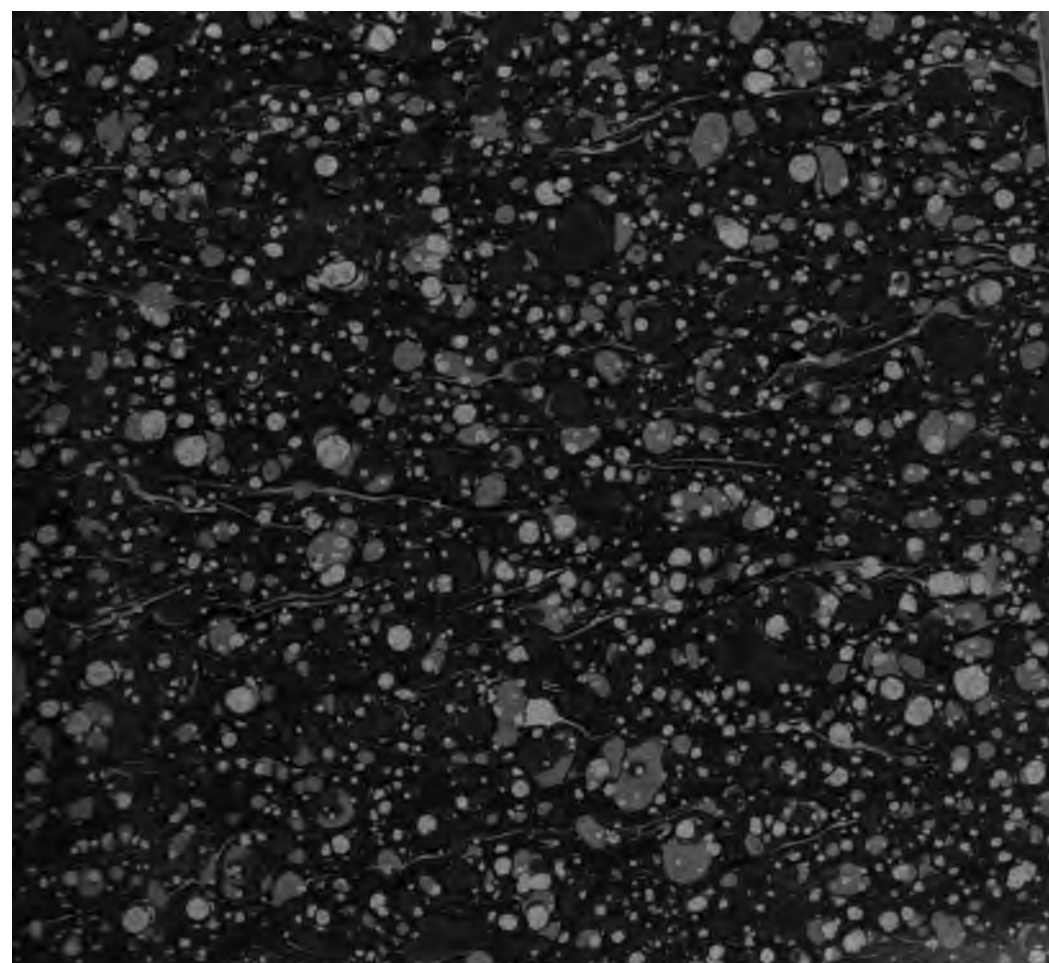
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>







BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888).

PUBLIE
PAR LES SECRETAIRES.

TOME VINGTIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1892



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERNITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
DE MENDIZABAL TAMBORÉL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARRY, contrôleur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1892 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{ MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
Président.....	MM. VICAIRE.
Vice-Présidents	{ DE COMBEROUSSE. GOURSAT. HUMBERT. PICQUET.
Secrétaires	{ KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires.....	{ CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste.....	DE PRESLE.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ ANDRÉ, 1893. APPELL, 1894. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1893. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1894. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1894. POINCARÉ, 1893. ROUCHÉ, 1893.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

LISTE
DES
PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAIMÉ.
1876	DE LA COURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	BALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOCRET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.

18118. Paris. -- Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quat des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,
PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

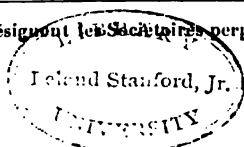
TOME VINGTIÈME. — ANNÉE 1892.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.
—
1892

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1887. ALBEGGIANI (M.-L.), professeur à l'Université, Salita Banditore, 4, à Palerme (Italie).
1881. AMIGUES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, professeur de Mathématiques, rue Vavin, 5, à Paris.
1879. APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. ARNAUD, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGHIN (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
1874. BEYVOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (1).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. BEYENS (Ignacio), major du Génie, Santa Inès, 5, à Cadix (Espagne).
1872. BIENAYNÉ (Arthur), directeur du matériel, au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au Collège Stanislas, rue de Madame, 34, à Paris, S. P.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. BJERKNES, professeur à l'Université, à Christiania (Norvège).
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1881. BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. BOULANGER, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algérie).
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 15, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme), S. P.
1886. BRINEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris. S. P.
1885. CAROV, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Passy-Paris.
1887. CASPARY, professeur au Collège Humboldt, à Berlin (Allemagne).
1873. CATALAN, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à Liège (Belgique).
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Edimbourg (Écosse).
1873. CIVIALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.

(1) Les initiales S. P. désignent les Secrétaires perpétuels.



060962

Date
de
l'admission.

1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. **COLLIGNON**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. **COLOT**, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. **COMBEROUSSE** (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. **COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. **CRAIG** (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. **CREMONA**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. **CRETIN**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. **DARBOIX**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. **DAUTHEVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. **DEFFORGES**, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. **DELANVOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. **DEMARTRES**, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1883. **DERUYTS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. **DEWILF**, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabatau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. **DREYFUS** (Camille), député, quai Voltaire, 3, à Paris.
1886. **DUNCAN**, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. **DURRANDE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. **DYCK** (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1881. **ESCARY**, professeur au Lycée, à Constantine (Algérie).
1873. **FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au Lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1885. **FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. **FIELDS** (John), professeur de Mathématiques, Alleghany College, à Meadville (États-Unis d'Amérique).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1891. **FONTVILLANT** (DE), répétiteur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de la Voûte, près Marmhac (Cantal).

Date
de
l'admission.

1882. **WILSON**, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUFSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZARENBA**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark)
-

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur D ^r Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammennøyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur D ^r Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Date
de
l'admission.

1885. NEIBERG, professeur à l'Université, rue Schlessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (D'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barren-tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, rue Claude-Bernard, 17, à Paris.
1872. PARMENTIER (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1881. PAUTONNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. PERRIN, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1873. PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'Ecole Polytech-nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohème).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), 6, cité Odier, rue Washington, à Paris, S. P.
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. PUTZ (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1874. REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
1872. RIBAUCCOUR, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. ROBIN (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. ROUQUET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, Discesa Case Arse, 2, Catanzaro (Italie).

Date
de
l'admission.

- 1881. SAINT-PAUL (Ducur DE), lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, Grande Allée, 17, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1889. SARAZ, professeur de Mathématiques, rue Saint-Sulpice, 25, à Paris.
- 1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
- 1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- 1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
- 1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
- 1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
- 1877. SÉCUI, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
- 1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
- 1883. SIMANT, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
- 1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
- 1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
- 1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
- 1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
- 1872. TANNERY (Paul), directeur des Manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris. S. P.
- 1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
- 1882. TARRY (Gaston), contrôleur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger, S. P.
- 1882. TCHÉDICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
- 1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
- 1872. TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
- 1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
- 1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
- 1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
- 1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
- 1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
- 1885. VANECEK (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
- 1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
- 1876. VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
- 1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université de Pise (Italie).
- 1880. WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
- 1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
- 1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
- 1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).

Date
de
l'admission.

1890. **GENTY**, enseigne de vaisseau, à bord du *Lutin*, division de Cochinchine, à Saigon.
1889. **GEORGIAN**.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GERONO**, ancien professeur de Mathématiques, rue d'Alembert, 1, à Paris.
1872. **GOFFANT**, rue Nollet, 57, Paris.
1881. **GOURSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. **GRUEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. **GUIMARAES**, officier du Génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. **HENRY**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. **HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 16, boulevard Malesherbes, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. **ISSALY** (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. **JOXQUIÈRE** (Alfred), Docteur en Philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1880. **KÆNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. **KOBB** (Gustaf), Gothembourg (Suède).
1881. **LACOR**, professeur de Mathématiques, 10, rue Stanislas, à Paris.
1890. **LAGEBORG** (M^{lle}), à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Palestro (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, directeur des études à l'école Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1872. LENOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 2, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1836. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. MALEYX, ancien professeur au collège Stanislas, à Mercier, près Coussac-Bonneval (Haute-Vienne).
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. MARTIN (Artemas). U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue Lhomond, 60, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timoficoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TANBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique), S. P.
1881. MERCEREAU, licencié ès Sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris, S. P.
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Rhowanipore, à Calcutta (Inde).

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palermo.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Washington.....	Smithsonian Institution.	Etats-Unis d'Amérique.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1892.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. Fouret : *Sur une manière de déduire du théorème de Budan-Fourier une limite inférieure des racines d'une équation.*

M. RAFFY fait une Communication *Sur les réseaux conjugués qui se conservent dans la déformation des surfaces.* Il rappelle que les trois coordonnées d'une surface, considérées comme fonctions des paramètres d'un réseau conjugué, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que de l'élément linéaire de la surface. Il montre que, *si une seule des coordonnées vérifie cette équation, les deux autres la vérifient aussi, sauf dans le cas des cylindres.* D'où l'explication de ce fait que les surfaces, dont on connaît des déformations conservant un réseau conjugué, ne dépendent que d'un seul paramètre, abstraction faite des paramètres de position.

M. Ém. Picard communique la Note suivante :

Sur la fonction exponentielle;

par M. D'ARONE.

Désignons par $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deux fonctions de n variables réelles, finies et continues ainsi que leurs dérivées premières, admettant des dérivées secondes finies et satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

fonctions qui, d'après un théorème connu ⁽¹⁾, doivent pouvoir croître indéfiniment pour des valeurs toujours croissantes des variables.

Nous allons démontrer que, si la différence

$$(1) \quad A = e^M(x_1, x_2, \dots, x_n) - e^N(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une constante différente de zéro, les fonctions M et N se réduisent à des constantes.

En effet, la différence A étant une constante et les deux expressions $\Delta^2 M$, $\Delta^2 N$ étant nulles, on a

$$(2) \quad e^M \frac{\partial M}{\partial x_i} = e^N \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$(3) \quad \begin{cases} e^M \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ = e^N \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Élevant au carré et ajoutant les n égalités (2), on obtient

$$(4) \quad \begin{cases} e^{2M} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ = e^{2N} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Mais, comme on peut le voir, les relations (1), (3) et (4) ne peu-

(1) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 152.

vent exister que si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial N}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}, \quad N(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Considérons maintenant la relation

$$(5) \quad e^{G(z)} - e^{P(z)} = A,$$

où $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières de la variable complexe z et A une constante différente de zéro. Si $G(z)$ et $P(z)$ sont entières rationnelles, alors en dérivant l'identité (5) et supprimant les racines communes des deux polynômes $G'(z)$, $P'(z)$ qui sont du même degré de multiplicité, on démontre que *si la différence de deux fonctions exponentielles, dont les exposants sont deux fonctions entières rationnelles, est constante, ces deux fonctions doivent se réduire à deux constantes*

Si $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières transcendentes, au sens de Weierstrass, ce que nous avons dit nous permet d'affirmer que la différence $e^M - e^N$, où M et N représentent les parties réelles des fonctions $G(z)$, $P(z)$, est une fonction de deux variables réelles à variabilité limitée dans le sens de Jordan.

Si donc on pouvait démontrer la constance de la valeur de la dernière fonction, on se trouverait avoir démontré dans toute sa généralité la proposition que nous avons donnée pour des valeurs entières rationnelles des exposants.

Cette dernière propriété nous permettrait de démontrer par voie directe, sans recourir aux fonctions modulaires, un des théorèmes les plus importants de l'analyse moderne, dû à M. Picard :

Si une fonction $f(z)$, holomorphe dans tout le plan, ne prend jamais ni la valeur a ni la valeur b , elle se réduit à une constante (1).

(1) PICARD, *Sur les fonctions entières* (Comptes rendus, 1879, 2^e semestre) et *Mémoire sur les fonctions entières* (Annales de l'École Normale supérieure; 1880).

En effet, la théorie des fonctions permet d'écrire

$$f(z) - a = e^{G(z)},$$

$$f(z) - b = e^{P(z)},$$

d'où

$$e^{G(z)} - e^{P(z)} = b - a = \text{const.}$$

On aurait donc $G = \text{const.}$, $P = \text{const.}$ et, par suite, aussi $f(z) = \text{const.}$

SÉANCE DU 20 JANVIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Hermann : *Sur quelques procédés de Cryptographie.*

M. Antomari : *Sur les podaires et les courbes polaires réciproques.*

M. Félix Lucas : *Sur un mode d'intégration de certaines équations linéaires du premier ordre.*

M. FOURET fait la Communication suivante :

Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique.

1. Il existe, comme on le sait, plusieurs méthodes pour trouver une limite supérieure des racines d'une équation algébrique et, notamment, une règle remarquable, due à Newton, qui présente l'avantage de fournir, pour cette limite, un nombre moins grand que les autres règles connues. Quant à la détermination d'une limite inférieure des racines d'une pareille équation $F(x) = 0$, on a coutume de la ramener à la recherche d'une limite supérieure des racines de $F(-x) = 0$. Ce procédé indirect est défectueux. La limite inférieure qu'il fournit est toujours négative et sa valeur absolue est généralement plus grande qu'il ne conviendrait. Voici une méthode, vraisemblablement nouvelle et, en tous cas, inconnue

dans l'enseignement ⁽¹⁾, qui ne présente pas ces inconvénients. Elle jouit en outre des mêmes privilèges que la règle de Newton, dont elle est, en quelque sorte, la contre-partie. On la déduit immédiatement du théorème suivant :

2. *Tout nombre qui, substitué à x dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.*

Soit a un nombre, positif ou négatif, qui, substitué dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Nous allons montrer que $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucun nombre plus petit $a - h$ ($h > 0$).

On a, en effet,

$$F(a - h) = F(a) - h F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) - \dots \\ + (-1)^p \frac{h^p}{1.2 \dots p} F^p(a) + \dots + (-1)^m \frac{h^m}{1.2 \dots m} F^m(a).$$

D'une manière générale, et par hypothèse, $F^p(a)$ est du signe de $F(a)$ ou d'un signe contraire, suivant que p est pair ou impair et le terme $\frac{h^p}{1.2 \dots p} F^p(a)$ est précédé, dans le développement précédent, du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second. Donc $F(a - h)$ est une somme des termes tous de même signe et, par conséquent, ne peut être nul.

3. La marche à suivre, pour trouver une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$ est tout indiquée. On part d'un nombre, aussi grand que possible, qui, substitué dans $F^{m-1}(x)$, donne un résultat de signe contraire à $F^m(x)$, c'est-à-dire un résultat négatif, en supposant positif le terme du plus haut degré de $F(x)$ ⁽²⁾. On vérifie si ce nombre rend positif $F^{m-2}(x)$, ou on le

(1) Cette règle nous a été suggérée par le théorème de Budan et Fourier, comme on peut le voir dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3^e série, t. XI, p. 82).

(2) On peut même prendre, comme point de départ, le nombre qui annule la dérivée $F^{(m-1)}(x)$.

diminue, jusqu'à ce qu'il en soit ainsi. On examine ensuite si le nombre, ayant satisfait à cette épreuve, rend négatif $F^{m-3}(x)$; s'il n'en est pas ainsi, on le remplace par un autre plus petit, remplissant cette dernière condition, et l'on continue à procéder ainsi de proche en proche, sans qu'il y ait à revenir sur les essais déjà faits. On arrive ainsi finalement à un nombre inférieur aux racines de $F(x) = 0$ et en même temps aux racines des équations dérivées successives $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$, ..., $F_{(x)}^{(m-1)} = 0$.

Cette méthode offre deux particularités, qui la distinguent, au même titre que la règle de Newton : 1^o elle fournit un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite des racines des équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$, ..., $F^{m-1}(x) = 0$; 2^o elle permet d'obtenir, dans le cas d'une équation ayant toutes ses racines réelles, un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite racine de cette équation.

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, donné sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Laisant fait connaître une autre solution du problème précédent.

M. Félix Lucas présente une remarque sur le même sujet.

M. Humbert : *Sur une propriété de la surface de Kummer.*

M. Kœnigs : *Sur les lignes asymptotiques des surfaces.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Transformation d'un polynôme entier.

Soit un polynôme entier de degré n

$$(1) \quad \varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

que nous nous proposons de mettre identiquement sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} b_0 + b_1x + b_2x(x-1) + \dots \\ + b_px(x-1)\dots(x-p+1) + \dots + b_nx(x-1)\dots(x-n+1). \end{cases}$$

Si nous posons

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_p(x) = b_p + b_{p+1}(x-p) + b_{p+2}(x-p)(x-p-1) + \dots \\ \quad + b_n(x-p) \dots (x-p-n+1) \quad (p = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

nous avons évidemment

$$(4) \quad \begin{cases} b_0 = \varphi(0), & b_1 = \varphi_1(1), & b_2 = \varphi_2(2), & \dots \\ b_p = \varphi_p(p), & \dots & b_n = \varphi_n(n); \end{cases}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont en outre liées par les relations

$$(5) \quad \varphi_{p+1} = \frac{\varphi_p(x) - \varphi_p(p)}{x - p} \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Le polynôme $\varphi(x)$ étant donné sous la forme (1), on pourrait donc, au moyen de ces relations, déterminer successivement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et, par conséquent, obtenir ainsi les divers coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ par les formules (4).

Il est possible d'arriver à une solution plus directe, et peut-être plus élégante, en ne faisant figurer que les fonctions φ dans les diverses expressions de $b_0, b_1, \dots, b_n$. Si, en effet, nous calculons les premiers de ces coefficients, nous trouvons très facilement

$$\begin{aligned} b_0 &= \varphi(0), \\ b_1 &= \varphi_1(1) = \varphi(1) - \varphi(0), \\ b_2 &= \varphi_2(2) = \frac{\varphi(2) - 2\varphi(1) + \varphi(0)}{2!}, \end{aligned}$$

valeurs qui peuvent s'écrire symboliquement

$$b_0 = [\varphi - 1]^0, \quad b_1 = [\varphi - 1]^1, \quad b_2 = \frac{1}{2!} [\varphi - 1]^2, \quad \dots$$

avec cette convention que toute puissance de φ , telle que φ^m , sera remplacée par $\varphi(m)$ dans les résultats développés, et que l'unité sera remplacée par $\varphi(0)$.

On peut arriver à démontrer que la loi, qu'on prévoit par induction, est complètement générale, c'est-à-dire qu'on a symboliquement

$$(6) \quad b_p = \varphi_p(p) = \frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p$$

pour toutes les valeurs entières de p jusqu'à n inclusivement.

Pour y parvenir, nous supposerons la formule (6) vérifiée jusqu'à la valeur $p - 1$, et nous remarquerons en outre que, d'après la définition même de la fonction $\varphi_p(x)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= b_0 - b_1x - b_2x(x-1) + \dots \\ &\quad - b_{p-1}x(x-1)\dots(x-p+2) + x(x-1)\dots(x-p+1)\varphi_p(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après nos hypothèses.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + \frac{x}{1} [\varphi - 1] - \frac{x(x-1)}{2!} [\varphi - 1]^2 + \dots \\ &\quad - \frac{x(x-1)\dots(x-p+2)}{(p-1)!} [\varphi - 1]^{p-1} + x(x-1)\dots(x-p+1)\varphi_p(x). \end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans cette formule x par p , elle donne

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(p) &= \varphi(0) + \frac{p}{1} [\varphi - 1] + \frac{p(p-1)}{2!} [\varphi - 1]^2 + \dots + p[\varphi - 1]^{p-1} \\ &\quad + p! \varphi_p(p). \end{aligned} \right.$$

Ajoutons à la première ligne et retranchons à la seconde le terme $[\varphi - 1]^p$. La première ligne pourra alors s'écrire symboliquement $[1 + \varphi - 1]^p$; et, comme les calculs de réduction des coefficients, une fois les développements effectués, sont identiquement les mêmes que pour des calculs de puissances, il s'ensuit que ce développement symbolique $[1 + \varphi - 1]^p$ se ramènera bien réellement à $[\varphi]^p$, ou $\varphi(p)$ en vertu des conventions faites. La relation (7) devient donc

$$\varphi(p) = \varphi(p) - [\varphi - 1]^p + p! \varphi_p(p)$$

ou

$$(8) \quad \varphi_p(p) = b_p = \frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p,$$

ce qui établit bien la généralité de la loi vérifiée.

Il est évident que $b_0 = a_0 = \varphi(0)$. On a aussi $b_m = a_m$, à cause de l'identité des deux formules (1) et (2).

Enfin, pour une valeur de p supérieure à m , le coefficient b_p correspondant est nul. Par conséquent, la formule symbolique

$$\frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p$$

donne les coefficients b_p de la formule (2) pour $p < m$. Elle donne a_m pour $p = m$ et, enfin, pour $p > m$, on a $[\varphi - 1]^p = 0$.

La formule (2) peut s'écrire, d'après ce que nous venons de voir,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + x[\varphi - 1]^1 + \frac{x(x-1)}{2!} [\varphi - 1]^2 + \dots \\ &+ \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} [\varphi - 1]^n. \end{aligned} \right.$$

Si l'on y remplace x par $-x$, elle devient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(-x) &= \varphi(0) - x[\varphi - 1]^1 + \frac{x(x+1)}{2!} [\varphi - 1]^2 - \dots \\ &+ (-1)^n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} [\varphi - 1]^n. \end{aligned} \right.$$

Par suite nous avons, pour toutes les fonctions paires, une nouvelle forme de la fonction $\varphi(x)$ au moyen de cette relation (10); et, en changeant tous les signes du second membre, nous avons un développement s'appliquant aux fonctions impaires.

La soustraction des relations (9) et (10) dans le premier cas, l'addition dans le second, nous donnent donc les deux propositions suivantes :

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances paires de x , le développement symbolique

$$\begin{aligned} 2[\varphi - 1]^1 x + \frac{[\varphi - 1]^2}{2!} [x(x-1) - x(x+1)] \\ + \frac{[\varphi - 1]^3}{3!} [x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x+2)] + \dots \end{aligned}$$

est identiquement nul.

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances impaires de x , le développement symbolique

$$\begin{aligned} 2\varphi(0) + \frac{[\varphi - 1]^2}{2!} [x(x-1) + x(x+1)] \\ + \frac{[\varphi - 1]^3}{3!} [x(x-1)(x-2) - x(x+1)(x+2)] + \dots \end{aligned}$$

est identiquement nul.

NOTE. — Le problème qui fait l'objet de cette Communication a déjà été résolu par M. Maurice d'Ocagne, en suivant une voie différente (*American Journal of Mathematics*, vol. XIII, n° 2).

La solution de M. d'Ocagne repose sur l'emploi des nombres remarquables K_m^p , qu'il a imaginés et étudiés dans de très intéressants Mémoires. La formule à laquelle il arrive, les notations étant les mêmes que dans la présente Communication, est la suivante :

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + \dots + K_n^p a_n.$$

En remplaçant les nombres K_m^p par leurs valeurs explicites en fonctions de m et de p , valeurs données par M. d'Ocagne dans son Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables* (*American Journal*, 1887, p. 357), on retrouve précisément la formule symbolique (6) établie ci-dessus.

Cette dernière offre donc, par une marche inverse, un nouveau moyen d'obtenir, en fonction de m et de p , l'expression explicite des nombres K_m^p .

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections: M. Demoulin, présenté par MM. d'Ocagne et Raffy; M. Hermann, présenté par MM. Désiré André et Kœnigs, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne : *Nouvelle construction du point le plus probable déterminé sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Lemoine développe certaines considérations, tendant à constituer une sorte d'*art des constructions géométriques*, au point de vue de la simplicité et de l'exactitude du tracé.

M. FÉLIX LUCAS communique la Note suivante :

Note relative aux points centraux.

Soit

$$(1) \quad f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = 0$$

l'équation d'un système plan de p points quelconques. Je regarde ces points comme matériels et ayant l'unité de masse.

En égalant à zéro les dérivées successives de $f(z)$, nous obtiendrons les *points centraux* d'ordres successifs du système de points considérés.

Soit S_1 la somme des racines $z_1, z_2, \dots, z_p$; le point central d'ordre $(p-1)$, qui se détermine en annulant la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, a pour coordonnée affixe $\frac{S_1}{p}$; c'est le centre de gravité G du système proposé.

Soit S_2 la somme des produits deux à deux des racines $z_1, z_2, \dots, z_p$; les deux points centraux d'ordre $(p-2)$, dont l'équation s'obtient en annulant la $(p-2)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, ont pour coordonnées affixes les deux racines de l'équation

$$(2) \quad \frac{p(p-1)}{2} z^2 - (p-1)S_1 z + S_2 = 0;$$

le milieu de ces deux points coïncide avec G , en sorte que la droite qui les joint passe par le centre de gravité du système proposé; il s'agit de caractériser la direction de cette droite.

A cet effet, supposons que le point G ait été pris pour origine des coordonnées et que l'axe des x ait été dirigé suivant la droite considérée; dans cette hypothèse, S_1 sera nul, et S_2 devra, d'après l'équation (2), être réel et positif. Or on a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum z_m z_n = \sum (x_m + y_m \sqrt{-1})(x_n + y_n \sqrt{-1}) \\ &= \sum (x_m x_n - y_m y_n) + \sqrt{-1} \sum (x_m y_n + x_n y_m); \end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$0 = \sum (x_m y_n + x_n y_m),$$

ou, ce qui revient au même, puisque la somme S_1 est nulle,

$$\sum x_m y_m = 0;$$

il en résulte que l'axe des x se trouve en coïncidence avec un des axes principaux d'inertie du système de points proposés. Par conséquent, *la droite qui joint les deux points centraux d'ordre $(p-2)$ d'un système plan de p points est dirigée suivant un des axes principaux d'inertie de ce système.*

On en déduit ce théorème :

Un système plan de points et les systèmes de ses points centraux successifs admettent les mêmes directions principales d'inertie.

Pour que l'ellipse d'inertie du système de points considéré devienne un cercle, il faut et il suffit que les deux points centraux d'ordre $(p - 2)$ coïncident. On a alors, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité, et quels que soient les axes rectangulaires des coordonnées,

$$S_2 = \sum z_m z_n = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$S z_m^* = 0.$$

De là ce théorème :

Pour que l'ellipse d'inertie d'un système plan de points soit une circonférence, il faut et il suffit que la somme des carrés de leurs coordonnées affixes, relativement à deux axes rectangulaires quelconques passant par leur centre de gravité, soit identiquement nulle. Dans ce cas, tous les systèmes de points centraux des divers ordres admettent des circonférences pour ellipses d'inertie.

M. LAISANT communique la Note suivante :

Note relative au symbole i' , et en général à l'opération p^q .

Sous le titre de *Théorie des acceptions*, il a paru, en 1891, un Volume de M. Évrard, ingénieur des Ponts et Chaussées en retraite, et qui contient surtout l'exposé des travaux de feu M. l'abbé George sur les imaginaires. Ce Livre renferme des choses intéressantes, et montre, notamment, que M. l'abbé George avait reconstitué presque intégralement, sans la connaître en aucune façon, la doctrine due aux travaux d'Argand, de Mourey, de Cauchy et de Bellavitis.

Mais, à côté de déductions rigoureuses, l'auteur a commis, à notre avis, une erreur fondamentale en voulant donner au symbole i' (ou $\sqrt{-1}^{i'}$) une signification géométrique arbitraire, et en essayant de créer ainsi une Algèbre des faits de l'espace, fondée sur les opérations auxquelles il soumet ce symbole. Comme beaucoup d'auteurs qui se sont livrés à des tentatives analogues, il arrive à des résultats géométriques exacts; mais ce succès, qu'on peut atteindre de bien des manières, n'est obtenu qu'au prix d'une affirmation qui renverserait toute l'analyse, lui enlè-

verait sa généralité, et rendrait impossible le calcul des imaginaires, au moins dès qu'il s'agit de fonctions exponentielles ou logarithmiques.

En particulier, et l'on peut dire que toute la théorie des acceptations repose là-dessus, l'auteur conteste avec grande énergie l'identité bien connue $i^2 = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Peut-être n'est-il pas inutile de revenir encore une fois sur ce sujet, pour essayer d'éclaircir certains points qu'en général on ne précise pas assez. Au fond, comme on va le voir, la question est cependant bien simple.

Si l'on veut que le calcul analytique soit possible, il faut admettre, par définition ou par convention, les identités

$$A^B A^C = A^{B+C}, \quad (A^B)^C = A^{BC}, \quad (AB)^C = A^C B^C.$$

Ceci posé, cherchons la signification de p^q , p et q étant deux quantités imaginaires.

Appelons respectivement a et b les modules de p et de q ; puis α et β les arguments des mêmes quantités. Il faut bien remarquer qu'une quantité imaginaire quelconque a , non pas un argument unique tel que α , mais une infinité d'arguments compris dans la formule $2k\pi + \alpha$. Dans nos résultats, il faudra donc, si l'on a donné les quantités sans préciser leurs arguments, remplacer α et β par $2k\pi + \alpha$ et $2k'\pi + \beta$, k et k' étant deux nombres entiers, positifs ou négatifs, indéterminés.

Nous avons

$$p = ae^{i\alpha}, \quad q = b(\cos \beta + i \sin \beta)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} p^q &= (ae^{i\alpha})^{b \cos \beta + ib \sin \beta} \\ &= a^{b \cos \beta} a^{ib \sin \beta} e^{ixb \cos \beta} e^{-ab \sin \beta}; \end{aligned}$$

a est un nombre positif qui peut s'écrire e^{la} . Alors,

$$\begin{aligned} p^q &= e^{b la \cos \beta + ib la \sin \beta + ixb \cos \beta - ab \sin \beta} \\ &= e^{b la \cos \beta - \alpha \sin \beta} e^{ib la \sin \beta + \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Ainsi p^q est une quantité imaginaire dont le module et l'argument se présentent sous les formes

$$e^{b la \cos \beta - \alpha \sin \beta} \quad \text{et} \quad b(la \sin \beta + \alpha \cos \beta).$$

Mais, si l'on s'est contenté de donner les quantités p et q , sans préciser leurs arguments, il reste, comme nous l'avons dit plus

haut, une indétermination, si bien qu'il faut remplacer α et β par leurs valeurs plus générales $2k\pi + \alpha$, $2k'\pi + \beta$. En ce qui concerne β , cela ne changera rien, les lignes $\sin\beta$ et $\cos\beta$ figurant seules. Pour α , au contraire, la modification sera réelle, et il faut constater que le module de p^q sera le nombre (positif) ayant pour logarithme

$$b[la \cos\beta - (2k\pi + \alpha) \sin\beta],$$

et que l'argument sera

$$b[la \sin\beta + (2k\pi + \alpha) \cos\beta].$$

Alors p^q représente non pas *une* quantité imaginaire, mais *une infinité* de quantités, dont les modules différents forment une progression par quotient, et les arguments une progression par différence. De même, par exemple, dans l'Algèbre élémentaire, on voit le symbole $\sqrt{-1}$ représenter *deux* quantités différentes, $+1$ et -1 .

Si, en particulier, on suppose $a = b = 1$ et $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $p = i$, $q = i$, on a

$$i^i = e^{-(2k + \frac{1}{2})\pi}.$$

Ce symbole i^i représente donc une infinité de quantités *toutes réelles*, formant une progression par quotient dont la raison est $e^{2\pi}$.

L'une seulement de ces quantités est $e^{-\frac{\pi}{2}}$, et c'est un tort, en effet, d'écrire sans autre explication

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207875, \dots$$

Si l'on représente par γ ce nombre $e^{-\frac{\pi}{2}}$, i^i représente *l'un quelconque* des termes de la progression

$$\dots, \frac{1}{\gamma^{2k-1}}, \dots, \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{\gamma^0}, \gamma, \gamma^2, \gamma^4, \dots, \gamma^{2k+1}, \dots$$

Il est possible, par un tel symbole exponentiel, de représenter aussi une progression géométrique quelconque à termes positifs.

Soient, en effet, f l'un des termes et g la raison. Posons, comme plus haut, $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; et, en outre, $\alpha = 2\pi \frac{lf}{lg}$, $b = -\frac{1}{2\pi} lg$, ce qui donnera toujours, pour b , un résultat posi-

tit, g pouvant être pris plus petit que l'unité. La formule

$$p^i \quad \text{ou} \quad (e^{xi})^{bi}$$

représentera l'un *quelconque* des termes de la progression donnée

$$\dots, \frac{f}{g^2}, \frac{f}{g}, f, fg, fg^2, \dots$$

On vérifie, en effet, qu'en laissant à α son indétermination, l'expression p^i , d'après les valeurs ci-dessus, se réduit à

$$e^{if+ki} = fg^k.$$

M. LUCIEN LÉVY fait la Communication suivante :

Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux.

Soient

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}, & q &= \frac{\partial z}{\partial y}, & H &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ A &= (1+q^2)s - pqt, & C &= pqr - (1+p^2)s, \\ B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r. \end{aligned}$$

Toute solution de l'équation de M. Maurice Lévy

$$A \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

donnera, d'après une remarque de M. Darboux, une surface qui, par une translation parallèle à Oz , engendre une famille de Lamé, c'est-à-dire une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

J'ai fait connaître, au mois de juin, une solution contenant deux fonctions arbitraires : ce sont les surfaces à lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à Oz . Quelques jours plus tard, M. Petot, par une très ingénieuse transformation géométrique, trouvait un certain nombre de solutions nouvelles, et signalait aussi celle que je viens de rappeler.

Je veux, aujourd'hui, faire connaître toutes les surfaces enveloppes de sphères qui jouissent de la même propriété. Dans les solutions que je vais indiquer, il subsiste une fonction arbitraire.

1° Les surfaces-canal, enveloppées par une sphère dont le centre décrit une courbe plane arbitraire située dans un plan perpendiculaire à Oz . Cette solution était à peu près évidente.

2° Les péricosphères symétriques par rapport à un plan passant par Oz . La directrice est encore quelconque; l'équation différentielle ordinaire, qui fait connaître la loi de variation du rayon de la sphère enveloppée, est susceptible d'une interprétation géométrique : les cylindres de révolution, qui ont pour bases les différentes lignes de courbure circulaires, interceptent sur l'axe Oz une longueur constante.

3° Les enveloppes de sphères, dans lesquelles chaque sphère touche son enveloppe suivant une circonférence de rayon nul. Ces surfaces se réduisent à une courbe.

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur certaines surfaces spirales.

Comme on connaît les géodésiques des surfaces de révolution, on sait intégrer, quel que soit m , l'équation

$$(1) \quad P^2 + P'^2 = \cos^{2m-2} \frac{u}{m},$$

dont dépendent les géodésiques des spirales applicables sur les surfaces de révolution. On sait, d'autre part (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1421), que la détermination des spirales d'élément linéaire

$$(2) \quad ds^2 = e^{2v} U^2 (du^2 + dv^2)$$

revient à l'intégration de l'équation

$$(3) \quad k^2 (z_0^2 + z_0'^2) = k^2 U^2 - U'^2.$$

Supposons que l'on prenne

$$(4) \quad U = \cos^{\frac{2}{3}} \frac{2u}{9}, \quad k^2 = \frac{1}{27}.$$

L'équation (3) devient

$$(5) \quad z_0^2 + z_0'^2 = \cos \frac{2u}{3}.$$

On voit qu'il suffit de faire $2m = 3$ pour identifier (1) et (5). On connaît donc une série simplement infinie de spirales admettant l'élément linéaire (2) dans l'hypothèse (4).

SÉANCE DU 2 MARS 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Laisant : *Sur les points centraux des systèmes de points dans l'espace.*

M. Félix Lucas démontre la proposition suivante :

Si la loi d'un mode de fonctionnement d'une machine dynamo peut s'exprimer au moyen d'une équation algébrique concrète à trois termes entre deux variables, on peut toujours, en remplaçant les variables concrètes par des variables arbitraires qui leur sont proportionnelles, transformer cette équation concrète en une équation purement numérique, absolument indépendante des éléments concrets de la machine considérée.

SÉANCE DU 16 MARS 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Carvallo : *Sur les lois abstraites du fonctionnement des machines.*

M. Fouret : *Sur la génération des congruences du premier ordre et de classe quelconque.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse.

Étant donné un système plan de p points matériels P , ayant tous l'unité de masse, j'ai démontré précédemment que la droite de jonction des deux points centraux d'ordre $(p - 2)$ coïncide avec l'un des axes de l'ellipse centrale d'inertie du système. Si l'on désigne par M la somme des affixes z_n des p points pour un système quelconque d'axes rectangulaires, et par N la somme des carrés z_n^2 de ces affixes, on déterminera les deux points cen-

traux dont il s'agit par l'équation

$$(1) \quad z^2 - \frac{2M}{p} z + \frac{M^2 - N}{p(p-1)} = 0.$$

Lorsque l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité G des points P, le paramètre M est nul et l'équation ci-dessus se réduit à

$$(2) \quad z^2 = \frac{N}{p(p-1)}.$$

Supposons que l'axe des x se trouve dirigé suivant la ligne de jonction de ces deux points; z deviendra égal à leur demi-distance R; N deviendra égal à $p(B^2 - A^2)$, A et B désignant les rayons de giration principaux relatifs à GX et à GY; nous aurons donc

$$(3) \quad (p-1)R^2 = B^2 - A^2.$$

Cette formule indique que *c'est toujours avec le grand axe de l'ellipse d'inertie que coïncide la droite de jonction des deux points centraux d'ordre $(p-2)$* . Elle montre en outre que *la différence des carrés des rayons de giration principaux est égale à $(p-1)$ fois le carré de la demi-distance des deux points centraux d'ordre $(p-2)$* .

Pour que l'ellipse principale d'inertie devienne une circonférence, il faut et il suffit que l'équation (1) ait ses racines égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(4) \quad M^2 = pN.$$

Supposons que cette condition soit remplie et remplaçons le point P_n , dont l'affixe est z_n , par le point P'_n , dont l'affixe est $z_n + \zeta_n$. Les paramètres M et N seront respectivement remplacés par $(M + \zeta_n)$ et par $(N + 2z_n\zeta_n + \zeta_n^2)$; la condition nécessaire et suffisante pour que cette déformation du système de points n'empêche pas l'ellipse principale d'inertie d'être une circonférence sera

$$(5) \quad (p-1)\zeta_n + 2(pz_n - M) = 0.$$

Aucune hypothèse particulière n'ayant été faite sur le choix des axes, nous pouvons placer l'origine au centre de gravité G des points P, de manière à annuler M; nous aurons alors

$$(6) \quad \zeta_n = -\frac{2p}{p-1} z_n.$$

On obtient par conséquent P'_n en prolongeant la droite $P_n G$ de la longueur

$$GP'_n = \frac{p+1}{p-1} GP_n.$$

En faisant occuper par les points P les sommets d'un polygone régulier, on peut obtenir, par des déformations successives, diverses figures dont les ellipses centrales d'inertie sont des circonférences.

M. GUIMARAËS adresse la Note suivante :

Sur trois normales spéciales à l'ellipse.

1. Le point de *déviatiou maxima* étant défini par

$$x = a \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad y = b \sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

la normale en ce point a pour équation

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = \frac{c^2}{\sqrt{a+b}},$$

et les segments ON et ON' que cette normale intercepte sur les axes sont

$$ON = \frac{c^2}{\sqrt{a(a+b)}}, \quad ON' = \frac{c^2}{\sqrt{b(a+b)}}, \quad NN' = \frac{c^2}{\sqrt{ab}}.$$

Le triangle ONN' étant rectangle, on obtient, en vertu du théorème de Stewart (¹), D étant un point quelconque sur NN' ,

$$(1) \quad \overline{ON'}^2 \cdot \overline{DN}^2 + \overline{ON}^2 \cdot \overline{DN'}^2 = \overline{NN'}^2 \cdot \overline{OD}^2.$$

Si le point D est au milieu de NN' , on a

$$\overline{ON'}^2 + \overline{ON}^2 = 4\overline{OD}^2,$$

d'où

$$(2) \quad \overline{OD} = \frac{c^2}{2\sqrt{ab}}.$$

et

$$\sin \widehat{DOA} = \frac{ON'}{2\overline{OD}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \tan \widehat{DOA} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

(¹) Voir *El Progreso matematico*, t. I, p. 195.

Si OD est perpendiculaire à NN', la formule (1) devient

$$\overline{ON}^2 \cdot \overline{ON'}^2 = \overline{OD}^2 \cdot \overline{NN'}^2,$$

d'où

$$OD = \frac{c^2}{a+b}.$$

2. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

qui est le point d'intersection de l'ellipse avec un vecteur faisant avec le grand axe un angle $\frac{\pi}{4}$, a pour équation

$$a^2x - b^2y = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

d'où

$$ON = \frac{bc^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad ON' = \frac{ac^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad NN' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{ab}.$$

Si OD est aussi perpendiculaire à NN', on voit que la relation (1) devient

$$\overline{ON}^2 \cdot \overline{ON'}^2 = \overline{OD}^2 \cdot \overline{NN'}^2,$$

d'où

$$(3) \quad OD = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 + b^4}},$$

et

$$\tan \angle DOA = \frac{b^2}{a^2}.$$

3. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

a pour équation

$$x - y = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d'où

$$ON = ON' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad NN' = ON\sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

c'est-à-dire que le triangle rectangle ONN' est isocèle, et la formule (1) devient

$$ON^2 + ON'^2 = 2ON^2$$

Si D est au milieu de NN', on trouve

$$(4) \quad OD = \frac{c^2}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}},$$

et le triangle ODN est rectangle en D et isocèle, ce qui est évident, et par suite l'angle que OD fait avec le grand axe est $\frac{\pi}{4}$. On voit donc qu'il est toujours possible de mener une normale par un point D porté sur le plan d'une ellipse, si sa distance OD au centre O est exprimée par une des formules (2), (3), (4) et si OD fait avec le grand axe un angle dont la tangente soit $\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{b^2}{a^2}, 1$ respectivement.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.

Je me propose d'indiquer brièvement la démonstration d'un théorème qui se trouve énoncé, à la suite d'une remarque de M. Goursat, dans un article *Sur l'homographie en Mécanique*, que j'ai publié dans le tome XII de l'*American Journal*, et d'en déduire la notion d'invariants d'un système. M. Dautheville et moi avons donné des cas particuliers de ce théorème (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1890; *American Journal*, t. XIII).

Soit un système matériel dont la configuration est définie par k paramètres $q_1, q_2, \dots, q_k$. Les équations du mouvement de ce système sous l'action de forces arbitraires ne dépendant que de sa position sont

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt},$$

Q_α ne dépendant que de $q_1, q_2, \dots, q_k$. Pour un deuxième système dont la configuration est définie par k paramètres $r_1, r_2, \dots, r_k$, on aura de même en appelant t_1 le temps

$$(2) \quad \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{r}_\alpha} \right) - \frac{\partial S}{\partial r_\alpha} = R_\alpha, \quad \dot{r}_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_1}.$$

On transformera l'un des mouvements dans l'autre, si l'on peut

trouver des fonctions φ_α et λ de $q_1, q_2, \dots, q_k$ telles qu'en posant

$$r_\alpha = \varphi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad dt_1 = \lambda dt,$$

les équations (1) se transforment en (2). On aura alors des identités de la forme

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=k} P_i^{(\alpha)} \left[\frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} \right].$$

Les coefficients $P_i^{(\alpha)}$ ne dépendent que de $r_1, r_2, \dots, r_k$, et non de leurs dérivées, comme on le voit en identifiant les termes contenant les dérivées secondes. L'expression Φ_α ne contient pas de dérivées secondes, mais chacun de ses termes contient des dérivées premières. Si la transformation est possible quelle que soit la loi des forces agissant sur l'un des systèmes, il faut qu'elle *annule* Φ_α , car autrement, d'après les équations (1) et (2), les Q_α contiendraient des dérivées dans leurs expressions, ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors, les Φ_α étant nuls, les identités (3) montrent que la transformation transforme un mouvement du premier système, lorsque ce système n'est sollicité par aucune force (ce qu'on peut appeler un mouvement *géodésique* du premier système), en un mouvement analogue du second. Pour que cette transformation soit possible, il faut et il suffit que certains *invariants* soient égaux.

Nous donnerons prochainement les expressions de ces invariants, qui se rattachent aux recherches de M. Beltrami.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles; par M. L. RAFFY.

1. L'élément linéaire d'une spirale étant réductible à la forme

$$(1) \quad ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2) e^{g + fA(\alpha)d\alpha},$$

il faut d'abord déterminer la fonction A de manière que les lignes d'égale courbure ($R_1 R_2 = \text{const.}$) soient parallèles.

La courbure totale, égale à une fonction d'un nouveau paramètre u , nous donne

$$(2) \quad \Lambda' e^{-\beta - \int \Lambda dx} = e^{-U_0/m},$$

relation qui revient à celle-ci

$$\beta = U_0(u) + \log \Lambda' - \int \Lambda dx.$$

Dès lors l'élément linéaire, exprimé en u et x , prend la forme

$$ds^2 = \Lambda' U_0'^2 e^{U_0} du^2 + 2 \Lambda' \left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right) U_0' e^{U_0} du dx + \Lambda' \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] e^{U_0} dx^2.$$

En vertu de l'identité générale

$$E du^2 + 2 F du dx + G dx^2 = \frac{EG - F^2}{G} du^2 + \frac{1}{G} (F du + G dx)^2,$$

nous pourrions l'écrire comme suit :

$$(3) \quad \left(\begin{aligned} ds^2 &= \frac{U_0'^2 e^{U_0} du^2}{\frac{1}{\Lambda'} \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right]} \\ &+ e^{U_0} \Lambda' \frac{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2}{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1} \left[U_0' du + \frac{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1}{\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda} dx \right]^2; \end{aligned} \right)$$

et la surface sera rapportée aux lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales. Ces trajectoires étant, par hypothèse, des géodésiques, la fonction U_0 doit pouvoir être choisie de façon que le coefficient de du^2 se réduise à l'unité. D'où ces deux conditions

$$(4) \quad U_0'^2 e^{U_0} = \text{const.} = 2m,$$

$$(5) \quad \frac{1}{\Lambda'} \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] = \text{const.} = 2m.$$

La première donne immédiatement

$$\frac{U_0'}{2} e^{\frac{U_0}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}, \quad e^{U_0} = \frac{mu^2}{2}, \quad U_0' = \frac{2}{u}.$$

La seconde peut, comme je l'ai montré antérieurement (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XIX, p. 65) s'intégrer par quadrature. Si l'on tient compte de l'une et de l'autre, l'élément

linéaire devient

$$(1)' \quad ds^2 = du^2 + u^2(2mA' - 1) \left(\frac{du}{u} + \frac{mA'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} \right)^2.$$

Effectuons le changement de variable

$$(6) \quad \frac{du}{u} + \frac{mA'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} = V_0(v)dv;$$

quelle que soit la fonction V_0 , les courbes $v = \text{const.}$ seront les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ Mais si l'on prend $V_0 v = 1$, l'équation précédente donne

$$m \int \frac{A'dx}{\sqrt{2mA' - 1}} = \log \frac{v}{u},$$

ce qui montre que α est une fonction du rapport $u : v$. Par suite, l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} f\left(\frac{u}{v}\right) dv^2;$$

d'où cette conclusion : *quand une spirale à lignes d'égale courbure parallèles est rapportée à ces lignes $u = \text{const.}$ et aux géodésiques orthogonales $v = \text{const.}$, on peut toujours faire en sorte que son élément linéaire soit une fonction homogène de u et de v .*

2. Cela posé, rappelons que, quand on rapporte une surface à ses lignes d'égale courbure, *supposées parallèles*, et à leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prend la forme

$$(e) \quad ds^2 = du^2 + W \frac{(U - V)^2}{U'} dv^2,$$

en appelant U une fonction de u , U' sa dérivée, V et W deux fonctions de v . Nous allons, en vertu de ce qui précède, pouvoir déterminer ces trois fonctions de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v . Nous aurons ainsi *toutes les formes possibles* de l'élément linéaire des spirales à lignes d'égale courbure parallèles.

Proposons-nous donc de satisfaire à l'équation

$$u \frac{\partial}{\partial u} \left[W \frac{(U - V)^2}{U'} \right] + v \frac{\partial}{\partial v} \left[W \frac{(U - V)^2}{U'} \right] = 0,$$

qui, développée et divisée par $W : U'$, peut s'écrire

$$(7) \quad \left(\frac{W'v}{W} - \frac{U'u}{U'} \right) (U - V) + 2U'u - 2V'v = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre, prise par rapport à u et à v ; il vient

$$(8) \quad U' \left(\frac{W'v}{W} \right)' + V' \left(\frac{U'u}{U'} \right)' = 0.$$

L'hypothèse particulière $V' = 0$ donne des spirales applicables sur des surfaces de révolution. Elle entraîne

$$\frac{W'v}{W} = \text{const.} = -n, \quad W = \frac{1}{v^n}.$$

Si, dans l'équation (7), nous faisons $V' = 0$, et, ce qui est permis, $V = 0$, en même temps que $W = v^{-n}$, nous obtenons une relation qui revient à

$$\frac{d}{du} \log \frac{U^2}{U'} = \frac{n}{u}.$$

On en déduit par une intégration immédiate l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^n}{v^n} dv^2,$$

qui convient à toutes les spirales applicables sur des surfaces de révolution. En effet, la condition $V = \text{const.}$ est nécessaire pour que l'élément linéaire (e) convienne à des surfaces de révolution, où les trajectoires des lignes d'égale courbure sont les méridiens.

3. Supposons maintenant $V' \neq 0$. L'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{1}{V'} \left(\frac{W'v}{W} \right)' = - \frac{1}{U'} \left(\frac{U'u}{U'} \right)' = \text{const.} = -2m;$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(9) \quad \frac{U'u}{U'} = 2mU - a, \quad \frac{W'v}{W} = -2mV - b.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent

$$-2m(U^2 - V^2) + (a - b)(U - V) + 2U'u - 2V'v = 0.$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$\begin{aligned} 2mU^2 - (a-b)U - 2U'u &= \text{const.} = -2h, \\ 2mV^2 - (a-b)V - 2V'v &= \text{const.} = -2h. \end{aligned}$$

Mais la première de ces relations, différenciée et rapprochée de la première des formules (9), entraîne $a + b = 2$, ce qui conduit à poser $a = 1 - 2c$, $b = 1 + 2c$; alors les trois fonctions inconnues U , V , W sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} \frac{U'}{mU^2 + 2cU + h} &= \frac{1}{u}, & \frac{V'}{mV^2 + 2cV + h} &= \frac{1}{v}, \\ \frac{W'}{W} + \frac{2mV + 2c + 1}{v} &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières étant les mêmes, il suffit d'intégrer

$$\frac{dy}{my^2 + 2cy + h} = \frac{dx}{x}.$$

Il convient de distinguer trois cas principaux, suivant que le trinôme dénominateur est du second degré, s'abaisse au premier ou se réduit à une constante.

4. PREMIER CAS : $m \neq 0$. — Nous pouvons remplacer c par mc , h par mh , et prendre

$$\frac{dy}{y^2 + 2cy + h} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2m(V + c) + 1}{v} = 0.$$

1° Si les racines du trinôme en y sont distinctes, nous aurons

$$\frac{dy}{(y + \alpha)(y + \beta)} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{m(2V + \alpha + \beta) + 1}{v} = 0;$$

intégrant et désignant par A , B , C trois constantes arbitraires, il vient

$$\begin{aligned} U &= -x + \frac{\alpha - \beta}{1 - A u^{m(\alpha - \beta)}}, & V &= -x + \frac{\alpha - \beta}{1 - B v^{m(\alpha - \beta)}}; \\ \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{m(\alpha - \beta)}{v} \frac{1 + B v^{m(\alpha - \beta)}}{1 - B v^{m(\alpha - \beta)}} &= 0, & Wv &= C v^{-m(\alpha - \beta)} [1 - B v^{m(\alpha - \beta)}]^2; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{Am} \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^{m \frac{\alpha - \beta}{2}} - B \left(\frac{v}{u} \right)^{m \frac{\alpha - \beta}{2}} \right]^2 dv^2; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(10) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[A_1 \left(\frac{u}{v} \right)^n + B_1 \left(\frac{v}{u} \right)^n \right]^2 dv^2,$$

avec trois nouvelles arbitraires A_1 , B_1 et n .

2° Si les racines du trinôme en y sont égales, on a

$$\begin{aligned} U &= -c + \frac{1}{\log A u^m}, & V &= -c + \frac{1}{\log B v^m}; \\ \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{2m}{v \log B v^m} &= 0, & Wv &= C (\log B v^m)^2; \\ ds^2 &= du^2 + C m \frac{u}{v} \left(\log \frac{A u^m}{B v^m} \right)^2 dv^2; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(A_1 \log \frac{u}{v} + B_1 \right)^2 dv^2.$$

SECOND CAS : $m = 0$, $c \neq 0$. — Remplaçons h par $2ch$; il viendra

$$\frac{dy}{y+h} = 2c \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2c+1}{v} = 0;$$

d'où, en intégrant et désignant par A , B , C trois arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= -h + A u^{2c}, & V &= -h + B v^{2c}, & W &= C v^{-2c-1}; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{2Ac} \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^c - B \left(\frac{v}{u} \right)^c \right]^2 dv^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (10).

TROISIÈME CAS : $m = 0$, $c = 0$. — On a simplement

$$dy = h \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} = 0.$$

L'intégration donne, avec trois constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= \log A u^h, & V &= \log B v^h, & Wv &= C; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{h} \frac{u}{v} \left(\log \frac{A u^h}{B v^h} \right)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (11).

5. En conséquence, tout élément linéaire de spirale à lignes

d'égale courbure parallèles, quand on rapporte la surface à ces lignes et aux géodésiques orthogonales, prend l'une des deux formes

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^n + B \left(\frac{v}{u} \right)^n \right]^2 dv^2,$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(A \log \frac{u}{v} + B \right)^2 dv^2.$$

Ces deux types, dont le second peut être considéré comme une dégénérescence du premier, contiennent la solution complète du problème que nous nous étions proposé. Il suffit de supposer dans le premier $AB = 0$ pour retrouver l'élément linéaire primitivement obtenu, qui convient à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

6. On peut arriver aux résultats qui précèdent en continuant les transformations commencées au n° 1. A cet effet, reprenons l'élément linéaire $(1)'$, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 (2m A' - 1) dv^2,$$

moyennant le changement de variable

$$(6) \quad \frac{m A' d\alpha}{\sqrt{2m A' - 1}} = V_0(v) dv - \frac{du}{u},$$

où A désigne la fonction de α définie par la relation (5).

Si nous représentons par dr le second membre de l'équation (6), A sera une fonction de r et nous pourrions poser

$$(12) \quad \frac{A''}{A'} - A = R(r).$$

Mais, en vertu de l'équation (5), il vient

$$R^2 = 2m A' - 1, \quad A' = \frac{R^2 + 1}{2m},$$

d'où, substituant dans la relation (6),

$$(6)' \quad \frac{R^2 + 1}{2R} d\alpha = dr.$$

Or, en prenant la différentielle logarithmique de A' , nous trouvons

$$\frac{A''}{A'} d\alpha = \frac{2R}{R^2 + 1} R' dr.$$

ce qui, en tenant compte de (6)', revient à

$$(13) \quad \frac{A''}{A'} = R';$$

d'où, par comparaison avec (12),

$$(14) \quad A = R' - R.$$

Différentions encore, en ayant égard à l'équation (6)'; nous arrivons facilement à la relation

$$(15) \quad m(R'' - R') - R = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'intégration donne R. Une fois cette fonction connue, l'élément linéaire, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 R^2 dv^2,$$

ne dépend plus que de la fonction V_0 . Nous allons déterminer cette fonction de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v .

Ce coefficient étant égal à $u^2 V_0^2 (2m A' - 1)$, nous devons satisfaire à l'identité

$$u \frac{\partial}{\partial u} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] + v \frac{\partial}{\partial v} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] = 0.$$

Mais de l'équation (6), qui définit x comme fonction de u et de v , nous tirons

$$\frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{u}, \quad \frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial x}{\partial v} = V_0.$$

Si l'on substitue ces expressions des dérivées de x dans l'identité proposée, il vient, tous calculs faits,

$$\sqrt{2m A' - 1} (V_0 v)' + \frac{A''}{A'} V_0 (V_0 v - 1) = 0.$$

7. Cette équation admet, quelle que soit la fonction A , la solution évidente $V_0 v = 1$, que nous avons déjà rencontrée. Elle n'en peut d'ailleurs admettre d'autres que celles-ci

$$\frac{-(V_0 v)'}{V_0 (V_0 v - 1)} = \frac{A''}{A' \sqrt{2m A' - 1}} = \text{const.} = n + 1.$$

Cherchons avant tout à déterminer la fonction V_0 ; nous avons

$$\frac{(V_0 v)'}{V_0 v (V_0 v - 1)} + \frac{n+1}{v} = 0,$$

d'où, intégrant et résolvant,

$$(16) \quad V_0 = \frac{v^n}{v^{n+1} - h}, \quad (h = \text{const.}).$$

L'équation (6) donne alors

$$(17) \quad r = \int V_0 dv - \log u = \log \frac{k}{u} (v^{n+1} - h)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (k = \text{const.}).$$

Quant à la fonction R , nous l'obtiendrons en rapprochant les deux équations que doit vérifier la fonction A , savoir l'équation (5) et celle qui vient d'être obtenue

$$\sqrt{2mA' - 1} = \frac{A'}{A} - A, \quad \frac{A'}{A' \sqrt{2mA' - 1}} = n+1.$$

En multipliant membre à membre, on trouve

$$(18) \quad n \left(\frac{A'}{A} - A \right) = A = nR,$$

à cause de l'équation (12). Mais en vertu de l'équation (13), ceci peut encore s'écrire

$$R' - nR = R, \quad \frac{R'}{R} = n+1;$$

d'où, en intégrant et désignant par g une constante arbitraire,

$$R = g e^{(n+1)r}.$$

D'après l'expression (17), trouvée pour r , nous aurons

$$R = g e^{n+1} \frac{v^{n+1} - h}{u^{n+1}};$$

d'où, substituant R et V_0 dans l'élément linéaire et désignant par C une constante arbitraire,

$$(19) \quad ds^2 = du^2 + C \left(\frac{v}{u} \right)^{2n} dv^2.$$

On voit que cet élément linéaire convient à des surfaces de révolution en même temps qu'à des spirales. La fonction A doit satisfaire aux deux équations

$$(18) \quad nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

$$(5) \quad \left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 = 2mA' - 1,$$

dont la combinaison donne successivement

$$n^2(2mA' - 1) - A^2 = 0, \quad mn^2A'' - AA' = 0,$$

en sorte que m doit être égal à l'inverse de $n(n+1)$. Dès lors les deux équations (5) et (18) se réduisent à une seule

$$nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

qui, par deux intégrations successives, donne facilement

$$A = n \operatorname{tang} \frac{n+1}{2} (x - x_0).$$

C'est, aux notations près, le résultat que nous avons trouvé précédemment (*loc. cit.*).

8. Revenons maintenant à l'hypothèse $V_0 v = 1$, qui laisse à la fonction A toute sa généralité. On en déduit

$$r = \int V_0 dv = \log u = \int \frac{dv}{v} = \log u = \log \frac{u}{v}.$$

L'élément linéaire devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} R^2 dv^2.$$

Il suffit donc, pour le connaître entièrement, de déterminer la fonction R de r que définit l'équation (15). Pour simplifier les notations dans ce qui suivra, nous écrirons

$$(15)' \quad R'' - R' - n(n-1)R = 0, \quad m = \frac{1}{n(n-1)}.$$

De la sorte, l'équation caractéristique sera

$$t(t-1) = n(n-1),$$

et admettra pour racines n et $1-n$. Nous avons donc à distinguer deux cas, suivant que ces racines sont inégales ou égales.

PREMIER CAS : $2n - 1 \neq 0$. — Les racines de l'équation caractéristique étant inégales, l'équation (15)' a pour intégrale générale

$$R = Ce^{nr} + De^{(1-n)r},$$

C et D étant deux constantes arbitraires; d'où, en remplaçant r par son expression,

$$R = C \left(\frac{v}{u} \right)^n + D \left(\frac{v}{u} \right)^{1-n}.$$

L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[C \left(\frac{v}{u} \right)^{n-\frac{1}{2}} + D \left(\frac{v}{u} \right)^{1-\frac{1}{2}} \right]^2 dv^2;$$

c'est, aux notations près, la formule (10). L'hypothèse $CD = 0$ donne l'élément linéaire (e)' trouvé d'abord.

SECOND CAS : $2n - 1 = 0$. — L'équation (15)' a pour intégrale

$$R = (Cr + D)e^{\frac{r}{2}};$$

d'où, en ayant égard à l'expression de r ,

$$R = \sqrt{\frac{v}{u}} \left(C \log \frac{v}{u} + D \right).$$

L'élément linéaire se réduit alors à

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(C \log \frac{v}{u} + D \right)^2 dv^2.$$

C'est, aux notations près, la formule (11). Nous retrouvons ainsi les conclusions du n° 3.

Sur les polygones inscrits dans les coniques;

par M. Félix LUCAS.

Le nombre de points nécessaire et suffisant pour déterminer une courbe algébrique du degré p est $\frac{p(p+3)}{2}$. Les p^2 points d'intersection de deux courbes du degré p forment les pivots d'une courbe mobile, du même degré, que l'on peut faire passer par un point quelconque du plan; si p est supérieur à 2, les p^2 pivots ne sont pas tous arbitraires. Il suffit de donner

$$\frac{p(p+3)}{2} - 1 = \frac{p^2 + 3p - 2}{2}$$

d'entre eux pour déterminer les $\frac{p^2 - 3p + 2}{2}$ autres.

Cela posé, considérons un polygone de $2p$ côtés ($p > 2$), inscrit dans une conique. Le système des p côtés de rang impair et celui des p côtés de rang pair forment deux courbes du degré p . Ces courbes se coupent en p^2 points ou pivots, comprenant les $2p$ sommets situés sur la conique donnée, et $p(p-2)$ autres points.

Pour déterminer ces p^2 pivots, il suffit d'en donner $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$, soit les $2p$ sommets du polygone avec $\frac{p^2 - 3p - 2}{2}$ autres pivots. Ce dernier nombre, qui peut aussi s'écrire $\frac{(p-2)(p+1)}{2}$, est exactement égal au nombre des points qui déterminent une courbe du degré $(p-2)$. Cette courbe et la conique donnée constituent ensemble une pivotante du degré p qui doit passer par les $\frac{p^2 - 3p + 2}{2}$ pivots restants. Par conséquent :

Lorsqu'un polygone de $2p$ côtés est inscrit dans une conique, ses côtés de rang impair coupent ses côtés de rang pair en $p(p-2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p-2)$.

En faisant $p = 3$, on obtient le théorème de Pascal relatif à

l'hexagone inscrit. Les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

En faisant $p = 4$, on obtient le théorème suivant :

Les huit côtés d'un octogone inscrit dans une conique forment un octogone inscrit dans une autre conique.

Si le premier octogone est convexe, le second octogone est étoilé. Les côtés successifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de l'un des octogones prennent, dans l'autre octogone, les rangs 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6.

En faisant $p = 5$, on obtient le théorème suivant :

Les côtés de rang impair d'un décagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en quinze points situés sur une courbe du troisième degré.

En faisant $p = 6$, on voit que :

Les côtés de rang impair d'un dodécagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en vingt-quatre points situés sur une courbe du quatrième degré.

En supposant que les côtés de rang pair d'un polygone de $2p$ côtés inscrit dans une conique deviennent infiniment petits, on obtient le théorème suivant :

Lorsqu'un polygone de p côtés est inscrit dans une conique, les tangentes à la conique, menées par les sommets de ce polygone, coupent ses côtés en $p(p - 2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p - 2)$.

Le triangle inscrit donne ainsi trois points en ligne droite; le quadrilatère inscrit donne huit points situés sur une conique; le pentagone inscrit donne quinze points sur une cubique; l'hexagone inscrit donne vingt-quatre points sur une quartique, etc.

En transformant les figures par la méthode des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes corrélatifs concernant les polygones circonscrits aux coniques.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1892.

PRÉSIDENTE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur les courbures des surfaces polaires réciproques et des surfaces inverses.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. d'Ocagne : *Sur les normales menées d'un point à une parabole.*

M. Fouret : *Sur un mode de génération des lignes asymptotiques de la surface de Steiner.*

M. Bioche : *Sur les surfaces réglées qui se transforment homographiquement en elles-mêmes.*

M. Raffy : *Sur le problème général de la déformation des surfaces et sur certains cas particuliers.*

SÉANCE DU 20 AVRIL 1892.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Communications :

M. d'Ocagne : *Construction de la parabole déterminée par un point, le centre de courbure en ce point, et la direction de l'axe.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. Bioche montre que, étant donnée une cubique gauche dont les trois directions asymptotiques sont rectangulaires, si on la coupe par des plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ainsi déterminés est la corde perpendiculaire à la direction des plans.

M. FOURET fait la Communication suivante :

Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique.

1. Dans les traités d'Algèbre, on restreint généralement la por-

tée pratique de la règle de Newton, qui donne une limite supérieure des racines d'une équation, en s'imposant de trouver pour cette limite un nombre positif. Cette règle, dans la plus grande généralité qu'elle comporte, doit s'énoncer ainsi :

I. *Toute valeur de x , positive ou négative, dont la substitution dans $F(x)$ et dans ses dérivées donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.*

Supposons que l'on trouve une valeur négative $-l$ de x satisfaisant à ces conditions. On en tirera cette double conclusion : 1° que l'équation n'a pas de racine positive; 2° qu'elle ne peut avoir de racine négative supérieure à $-l$.

La règle de Newton se complète par la suivante, que nous avons démontrée dans une précédente Communication (1) :

II. *Toute valeur de x , positive ou négative, dont la substitution dans $F(x)$ et ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de $F(x) = 0$.*

Quand on trouvera une valeur positive k de x , satisfaisant à ces conditions, on en conclura : 1° que l'équation n'a pas de racine négative; 2° qu'elle ne peut avoir de racine positive inférieure à k .

Pour résoudre une équation numérique, il y aura généralement avantage à lui appliquer tout d'abord ces deux règles. Ce n'est qu'ensuite que l'on devra subsidiairement, et s'il y a lieu, déterminer une limite inférieure des racines positives et une limite supérieure des racines négatives, en se servant des transformées en $\frac{1}{x}$ et en $-\frac{1}{x}$ de l'équation proposée.

2. On peut remarquer que l'application de la règle II équivaut à l'application de la règle I à la transformée en $-x$.

Posons, en effet,

$$G(x) \equiv F(-x).$$

(1) Même Tome, p. 4.

racines de l'équation (1), lorsqu'elle fait prendre des valeurs alternativement positives et négatives aux polynômes de la suite (2).

En effet, posons $F(-x) \equiv G(x)$. La quantité $-\lambda$ sera une limite inférieure des racines de l'équation (1), si λ est une limite supérieure des racines de $G(x) = 0$, c'est-à-dire donne, étant substituée à x , des valeurs de même signe aux polynômes $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_{m-1}(x)$, $G_m(x)$, déduits les uns des autres d'après la loi qui a servi à former les polynômes de la suite (2). Mais on voit immédiatement que l'on a

$$G_1(x) \equiv -F_1(-x), \quad G_2(x) \equiv F_2(-x), \quad G_3(x) \equiv -F_3(-x), \quad \dots$$

Donc, si $x = \lambda$ fait prendre des valeurs de même signe à $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $x = -\lambda$ donnera des valeurs alternativement positives et négatives à $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., et $-\lambda$ sera bien une limite inférieure des racines de $F(x) = 0$.

SÉANCE DU 4 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Hermann : *Sur un nouveau procédé de Cryptographie.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces applicables les unes sur les autres et dépendant d'une fonction arbitraire.*

M. Demoulin : *Sur une propriété des courbes tétraédrales.*

M. FOURET fait la Communication suivante :

Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate.

Parmi les propriétés qui caractérisent la lemniscate de Bernoulli, on remarque la suivante : c'est la courbe sur laquelle doit se mouvoir un point pesant, dans un plan vertical, pour décrire, sans vitesse initiale, à partir d'un point fixe, un arc quelconque dans l'intervalle de temps qu'il lui faudrait pour parcourir, en partant du repos, la corde sous-tendant cet arc.

C'est à tort que la découverte de cet intéressant théorème est attribuée tantôt à Fuss, tantôt à Saladini. En réalité, l'origine en remonte plus haut, ainsi que nous avons eu l'occasion de le reconnaître dernièrement. La recherche d'une courbe satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer est, en effet, traitée analytiquement pages 166 et 167 du tome II de la *Mécanique d'Euler* ⁽¹⁾, publiée en 1736. Saladini, sans citer Euler, donne une solution qui diffère peu de la sienne (*Memorie del Istituto nazionale italiano*, t. I, année 1804). Quant à Fuss, qui ne fait aucune allusion à ces précédents, sa solution basée sur des considérations ingénieuses, généralisées depuis ⁽²⁾, a du moins le mérite d'une plus grande simplicité (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. IX, année 1815). Il y a lieu toutefois d'être surpris que Fuss qui fut, comme on le sait, le disciple et le commentateur d'Euler, ait ignoré ou ait sciemment omis de mentionner l'antériorité de ce dernier.

Pour compléter ce petit historique, nous rappellerons que M. Ossian Bonnet, en 1844, a repris et généralisé la question en démontrant que la lemniscate jouit encore de la propriété indiquée plus haut, lorsque le mobile est sollicité par une force dirigée vers un point fixe et proportionnelle à sa distance à ce point fixe (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, p. 116). Il était alors naturel de se proposer de trouver la loi la plus générale à laquelle il faut soumettre la force agissant sur un mobile, pour faire décrire à celui-ci une lemniscate dans les conditions susénoncées. Nous avons résolu la question (*Journal de l'École Polytechnique*, LVI^e cahier, p. 171-211, année 1886), en donnant l'expression générale, qui dépend d'une fonction arbitraire, du potentiel dont doit dériver la force. De cette expression on conclut, en particulier, que la seule force centrale, répondant aux conditions du problème, est celle qui est proportionnelle à la distance du mobile au centre fixe : c'est le cas traité par M. Bonnet.

(1) Il y a lieu de remarquer que l'auteur ne donne pas le nom de *lemniscate* à la courbe qu'il obtient et dont il trouve cependant bien l'équation connue en coordonnées cartésiennes.

(2) Voir une Note de M. Rispa (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XXI, p. 225-230, année 1817) et deux Notes de M. Durrande (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, année 1874, p. 1550 et 1697).

SÉANCE DU 18 MAI 1892.

PRÉSIDENTE DE M. DE PRESLE.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination explicite des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. Lery : *Sur un problème d'Analyse indéterminée.*

M. Félix Lucas revient sur un théorème relatif aux *intersections de trois quadriques*, qu'il a fait connaître à la séance du 18 juin 1890, et qui a été publié au t. XIX du *Bulletin* (p. 118). Il fait observer que cette proposition rentre dans une série de théorèmes que M. Picquet a démontrés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1865 (2^e série, t. IV, p. 71 et suiv.).

M. Schlegel adresse un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions.*

M. CATALAN adresse la Note suivante :

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.

[Addition (1)].

VI. — *Autres séries elliptiques.*

13. Soit encore la formule de Cauchy

$$(1) \quad (1+x)(1+tx)\dots(1+t^{n-1}x) = 1 + T_{n,1}x + \dots + T_{n,p}x^p + \dots + T_{n,n}x^n,$$

dans laquelle

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\dots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on divise les deux membres par $1+x$, on a

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+tx)(1+tx^2)\dots(1+t^{n-1})x \\ = 1 + T_{n,1} \left| \begin{array}{l} x + T_{n,2} \\ - 1 \end{array} \right| x^2 + \dots + T_{n,n} x^{n-1}; \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} - T_{n,1} \\ + 1 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

(1) Voir le *Bulletin*, t. XIX, p. 124 et 145.

et, si n devient infini :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+tx)(1+t^2x)(1+t^3x)\dots = 1 + T_1 \\ \qquad \qquad \qquad - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + T_2 \\ - T_1 \\ + 1 \end{array} \right| x^2 + \dots (1). \end{array} \right.$$

Or

$$\begin{aligned} T_1 - 1 &= \frac{t}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}, \\ T_2 - T_1 + 1 &= \frac{t}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{t}{1-t} = \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)}, \\ 1 - T_2 + T_1 - 1 &= \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} - \frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{t^6}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Donc, si l'on fait $x = \pm 1$, $t = q$:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots, \end{array} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots \\ = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots, \end{array} \right.$$

Le premier membre de l'égalité (25) est $\beta\beta' = \frac{1}{\alpha}$; le premier membre de l'égalité (26) est $\alpha\alpha'$. Donc, d'après des formules connues (2),

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \varphi(1)q + \varphi(2)q^2 + \varphi(3)q^3 + \dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots, \end{array} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots \\ = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \end{array} \right.$$

(1) T_p représente $\frac{p(p-1)}{t^{\frac{p-1}{2}}}$
 $(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^{\frac{p-1}{2}})$

(2) *Recherches*..., p. 2, 3, 6.

14. *Remarque.* — L'égalité (24) est la même chose que

$$(29) \quad \begin{cases} (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \dots \end{cases}$$

Au lieu de celle-ci, Jacobi a trouvé (1)

$$(30) \quad \begin{cases} (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots \\ = 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}x^3 + \dots \end{cases}$$

Donc, en faisant $x = \pm 1$:

$$(31) \quad \beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

$$(32) \quad \alpha = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

Ces deux formules ont été données précédemment (2). En outre, la première est déjà ancienne (3).

VII. — *Autres théorèmes d'Arithmétique.*

15. Dans l'égalité (26) :

la fraction

$$\frac{q}{1-q} = q \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 1) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} = q^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 2) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = q^6 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 3) q^n;$$

etc. (4).

Si le second membre est développé sous la forme

$$1 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + A_4 q^4 + \dots,$$

(1) *Fundamenta*, p. 180.

(2) *Bulletin*, t. XIX, p. 148, 149.

(3) *Recherches*..., p. 52.

(4) *Recherches*..., p. 47. $F(n, p)$ représente le nombre de décompositions de n , en parties, égales ou inégales, non supérieures à p . On suppose $F(0, p) = 1$.

il doit être identique avec

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots$$

Conséquemment (1) :

$$A_1 = -F(0, 1) = -1,$$

$$A_2 = -F(1, 1) = -1,$$

$$A_3 = -F(2, 1) + F(0, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_4 = -F(3, 1) + F(1, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_5 = -F(4, 1) + F(2, 2) = -1 + 2 = +1,$$

etc. ; puis ce théorème :

La quantité

$$-F(n-1, 1) + F(n-3, 2) - F(n-6, 3) + F(n-10, 4) - \dots$$

nulle si n n'est pas pentagonal, égale ± 1 dans les autres cas.

16. L'égalité (25) conduit à un théorème qui a de l'analogie avec celui-ci (2).

Liège, septembre 1891.

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1892.

PRÉSIDENTE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques.*

M. Bioche : *Sur un problème relatif à l'ellipse.*

M. d'Ocagne : *Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane.*

M. DEMOULIN fait la Communication suivante :

*Quelques remarques relatives à la théorie
des courbes gauches.*

1. Nous rappellerons tout d'abord quelques résultats bien connus concernant la cinématique des systèmes invariables.

(1) *Recherches...*, p. 61, Table V.

(2) *Recherches...*, p. 48.

Considérons le trièdre trirectangle $Oxyz$. Le mouvement le plus général de ce trièdre peut être réalisé par le déplacement du point O accompagné d'une rotation ω autour d'un axe passant par ce point. Soient ξ, η, ζ les projections, sur les axes Ox, Oy, Oz , de la vitesse du point O et p, q, r les projections, sur les mêmes axes, du vecteur qui représente la rotation ω en grandeur, direction et sens. Les équations de l'axe hélicoïdal correspondant au déplacement infiniment petit du trièdre $Oxyz$ sont

$$(1) \quad \frac{qz - ry + \xi}{p} = \frac{rx - pz + \tau}{q} = \frac{py - qx + \zeta}{r} = \frac{V}{\omega},$$

V désignant la vitesse commune aux différents points de l'axe hélicoïdal.

2. Soient Ox, Oy, Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ) .

Cherchons l'axe hélicoïdal relatif au mouvement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites.

Si l'on suppose la vitesse du point O constante et égale à l'unité, on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \xi &= 1, & \eta &= 0, & \zeta &= 0, \\ p &= -\frac{1}{\rho}, & q &= 0, & r &= \frac{1}{\sigma}, \end{aligned}$$

ρ et τ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O .

Les équations (1) deviennent dès lors

$$(2) \quad \frac{-ry + 1}{p} = \frac{rx - pz}{0} = \frac{py}{r} = \frac{V}{\omega}.$$

On peut les mettre sous la forme

$$(3) \quad \frac{z}{x} = \frac{r}{p} = -\frac{\tau}{\rho},$$

$$(4) \quad y = \frac{r}{p^2 + r^2} = \frac{\tau^2 \tau^2}{\rho^2 + \tau^2}.$$

L'axe hélicoïdal instantané coupe donc, à angle droit, la nor-

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 9 et 10.

male principale Oy en un point distant de l'origine O de la longueur

$$(5) \quad l = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2};$$

l'angle θ qu'il fait avec la tangente Ox est donné par la formule

$$(6) \quad \tan \theta = \frac{r}{p} = \frac{-\tau}{\rho}.$$

3. Supposons que la courbe (Γ) possède une torsion constante $\frac{1}{\tau_0}$ et cherchons l'équation, par rapport au trièdre mobile, de la surface lieu des axes hélicoïdaux instantanés relatifs aux différents points de la courbe.

On a, en vertu des équations (3) et (4),

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= -\frac{\tau_0}{\rho}, \\ y &= \frac{\rho\tau_0^2}{\rho^2 + \tau_0^2}. \end{aligned}$$

Éliminant ρ entre ces deux équations, on trouve

$$y(z^2 + x^2) + \tau_0 xz = 0.$$

On reconnaît là le conoïde de Plücker. On a donc ce théorème :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un conoïde de Plücker.

4. Revenant au cas d'une courbe gauche quelconque, cherchons les expressions de la courbure et de la torsion en fonction de l et du rapport $\frac{V}{\omega}$ que, pour la simplicité, nous désignerons par k .

En éliminant ρ entre les égalités (5) et (6), on trouve

$$(7) \quad l = -\tau \sin \theta \cos \theta,$$

et, en éliminant τ ,

$$(8) \quad l = \rho \sin^2 \theta.$$

Exprimons maintenant θ en fonction des quantités l et k .

L'une des égalités (2) donne

$$\frac{\rho l}{r} = \frac{V}{\omega} = k,$$

ou

$$(9) \quad l = - \frac{k \tau}{\rho}.$$

Cette dernière égalité, jointe à (6), montre que

$$l = k \operatorname{tang} \theta.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{k^2}{l^2}.$$

La formule (8) devient donc

$$(10) \quad \rho = \frac{l}{\sin^2 \theta} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Mais, en vertu de (9),

$$-\tau = \frac{\rho l}{k};$$

par suite, en tenant compte de (10),

$$(11) \quad -\tau = k + \frac{l^3}{k}.$$

On voit donc que l'on peut déduire l'expression de $-\tau$ de celle de ρ en changeant l en k et k en l .

SÉANCE DU 15 JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. le général Frolov, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire; M. Gabriel Arnoux et M. Élie Perrin, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable défini sur une Carte par des recoupements non convergents.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante.

1. Commençons par rappeler les formules de Codazzi :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A q_1 + C p = 0, \\ C r + A'_v = 0, \\ A r_1 - C'_u = 0, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Transformons-les maintenant en y introduisant la courbure moyenne h et la courbure totale g . On a, comme on sait,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2h = \frac{p_1}{C} - \frac{q}{A}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = g = \frac{p q_1 - q p_1}{AC}.$$

La première de ces formules et la première du groupe (1) sont vérifiées si l'on pose

$$\frac{p_1}{C} = \mu + h, \quad \frac{q}{A} = \mu - h, \quad -\frac{q_1}{C} = \frac{p}{A} = m,$$

quelles que soient les deux indéterminées μ et m . Portant ces valeurs de p , q , p_1 , q_1 dans l'expression de g , nous trouvons

$$\mu^2 + m^2 = h^2 - g.$$

En dernier lieu, faisons

$$S^2 = h^2 - g, \quad \mu = S \sin \tau, \quad m = S \cos \tau;$$

nous avons ainsi exprimé p , q , p_1 , q_1 au moyen de h , de l'angle auxiliaire τ et des coefficients de l'élément linéaire qui est supposé connu :

$$\begin{array}{ll} p_1 = C(S \sin \tau + h), & -q_1 = CS \cos \tau, \\ q = A(S \sin \tau - h), & p = AS \cos \tau. \end{array}$$

Substituons dans les deux premières équations du groupe (2),

puis résolvons par rapport aux dérivées de τ ; il viendra

$$(3) \quad -\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{A}{C} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\sin \tau}{S} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\cos \tau}{S} - \frac{A}{C} \frac{\partial}{\partial v} \log A^2 S.$$

$$(4) \quad -\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{C}{A} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\sin \tau}{S} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\cos \tau}{S} + \frac{C}{A} \frac{\partial}{\partial u} \log C^2 S.$$

On voit par là que la courbure moyenne h satisfait à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre. En effet, en égalant les deux expressions de τ''_{uv} et tenant compte des formules (3) et (4), on a pour τ une équation finie où figurent les dérivées secondes de h . En la différentiant par rapport à u et v , on forme deux équations qui, jointes à la précédente et aux équations (3) et (4), donneront, par l'élimination de τ , de τ'_u et de τ'_v , deux équations du troisième ordre pour la fonction h .

2. Le système (3) et (4) se prête à bien des applications. Nous n'insisterons que sur celles qui concernent les surfaces à courbure moyenne constante. Une pareille surface étant rapportée à une famille d'isothermes, nous ferons $A^2 = C^2 = \lambda$ avec $h = \text{const}$. Il vient alors simplement

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \sqrt{h^2 - g}, \quad -\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \sqrt{h^2 - g},$$

d'où résulte la condition d'intégrabilité

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \lambda \sqrt{h^2 - g} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \lambda \sqrt{h^2 - g} = 0.$$

Cette condition étant vérifiée, τ ne sera déterminé qu'à une constante près, ce qui démontre un théorème de M. O. Bonnet : *Étant donnée une surface à courbure moyenne constante, il en existe une infinité d'autres ayant même courbure moyenne qu'elle et applicables sur elle.*

3. L'équation (5) exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

soit applicable sur une surface à courbure moyenne constante h , il suffira d'y introduire exclusivement des paramètres différentiels

invariants pour qu'elle soit valable dans tout système de coordonnées. Or cette équation peut s'écrire

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right] + \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right] = 0,$$

ou, d'après la définition du paramètre Δ_2 ,

$$\Delta_2 \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) + 2 \Delta_2 \log \lambda = 0.$$

Il n'y a plus qu'à se rappeler la formule qui donne la courbure totale pour trouver

$$\Delta_2 \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) - \frac{4}{R_1 R_2} = 0.$$

Telle est, exprimée au moyen d'invariants seulement, la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un élément linéaire, *donné sous une forme quelconque*, convienne à des surfaces à courbure moyenne constante h (à des surfaces minima si h est nul).

Il en résulte que cet élément est réductible à la forme

$$ds^2 = \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^{-\frac{1}{2}} (du^2 + dv^2).$$

Remarque. — L'angle τ est le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec l'une des lignes coordonnées.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane; par M. M. D'OCAGNE.

1. Je rappellerai que j'ai mis en évidence, dans un précédent Mémoire ⁽¹⁾, le rôle que joue, dans l'étude infinitésimale des courbes planes, une courbe adjointe que je désigne par la lettre n , et qui est ainsi définie :

Étant donnée une courbe plane c , on prend arbitrairement deux pôles O et P . On joint le pôle O à un point M pris sur c

⁽¹⁾ Publié en 1888 à la fois dans l'*American Journal of Mathematics* et dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, de Lisbonne.

et par P on mène une parallèle à la normale en M à la courbe c; les deux droites ainsi menées se coupent en un point H dont le lieu est la courbe adjointe n.

Cette courbe adjointe passe par les pieds des normales menées du point P à la courbe c; ses asymptotes sont parallèles aux normales menées du point O; elle passe par les points de rencontre du cercle décrit sur OP comme diamètre, d'une part, avec les tangentes menées de O à la courbe c; d'autre part, avec les parallèles aux asymptotes de cette courbe menées par le même point.

Lorsque la courbe c est une conique de centre O, l'adjointe n n'est autre que l'hyperbole équilatère passant par les pieds des quatre normales à la conique issues du point P. Si le point P est sur un des axes de cette conique, l'adjointe n se réduit à une perpendiculaire à cet axe.

J'ai d'ailleurs, dans mon Mémoire cité, fait connaître toutes les courbes admettant une droite pour adjointe n.

L'adjointe n permet de construire la normale en tout point de la courbe c et aussi de trouver les points de cette courbe où la normale a une direction donnée.

J'ai fait voir qu'elle permettait en outre d'obtenir très simplement le centre de courbure en tout point de la courbe c, et cela de la manière suivante :

Par le point M' où la normale en M à la courbe c coupe la droite OP, que l'on élève à cette normale une perpendiculaire coupant OM en L. La parallèle menée par L à la tangente en H à l'adjointe n passe par le centre de courbure Ω répondant au point M.

On déduit de là que les points d'inflexion de la courbe c se trouvent sur les droites joignant le point O aux points de contact des tangentes menées de P à l'adjointe n.

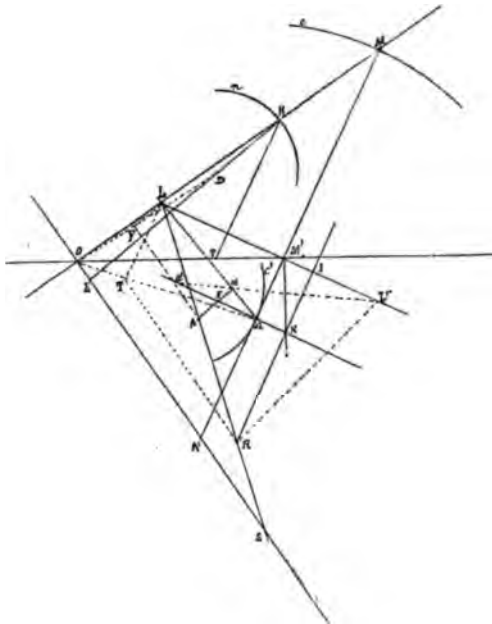
Le résumé qui précède fait ressortir l'intérêt qui s'attache à la considération de l'adjointe n. On voit que les éléments de cette courbe, dépendant d'infiniment petits d'un certain ordre, permettent d'obtenir les éléments de la courbe c dépendant d'infiniment petits de l'ordre immédiatement supérieur.

On est donc tout naturellement amené à rechercher comment la connaissance du centre de courbure de l'adjointe n entraîne celle du centre de courbure de la développée de la courbe c . C'est ce que je vais examiner ici.

2. Afin de permettre au lecteur de mieux suivre la solution qui va être donnée, je commencerai par en résumer la marche de la manière suivante :

Le centre de courbure Ω étant construit comme il a été dit plus

Fig. 1.



haut, nous allons déterminer successivement, en les déduisant les uns des autres (*fig. 1*) :

- 1° Le point où la droite LM' touche son enveloppe;
- 2° La normale au lieu décrit par le point L ;
- 3° Le point où la droite $L\Omega$ touche son enveloppe;
- 4° Le centre de courbure de la courbe que décrit le point Ω , c'est-à-dire de la développée c' de la courbe c .

3. *Point où la limite LM' touche son enveloppe.* — L'angle

LM'M étant constamment droit, on a le point I où LM' touche son enveloppe en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent la normale à l'enveloppe de MM' et la normale au lieu décrit par le point M', c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en Q à MM', et la perpendiculaire élevée en M' à OP.

4. *Normale au lieu décrit par le point L.* — Soit LRS la normale cherchée, qui coupe en S la perpendiculaire élevée en O à LM et en R la normale KI à l'enveloppe de LM'. Si $d(L)$, $d(M)$, $d(M')$ sont les différentielles des arcs de courbes décrits simultanément par les points L, M, M', on a

$$\frac{d(L)}{d(M)} = \frac{LS}{MN}, \quad \frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MQ}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on obtient

$$1 = \frac{LS \times MQ}{MN \times LR}$$

ou

$$\frac{LS}{LR} = \frac{MN}{MQ}.$$

On déduit de là que si la droite OQ coupe au point T la parallèle à MN menée par le point L, le point R se trouve sur la parallèle à ON menée par le point T; ce point R étant en même temps sur la droite KI précédemment obtenue, la normale LR est complètement déterminée.

5. *Point où la droite LQ touche son enveloppe.* — Si la normale à la courbe n au point H coupe en E la perpendiculaire ON à OH, on a

$$\frac{d(L)}{d(H)} = \frac{LS}{HE}.$$

Mais, si ϵ est l'angle de contingence de la courbe n au point H et D le centre de courbure correspondant, la différentielle $d(H)$ de l'arc a pour expression

$$d(H) = HD \times \epsilon.$$

Soit α le point cherché. La normale en ce point à l'enveloppe de LQ, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en ce point à LQ, cou-

pant en β la normale LR à la courbe décrite par le point L , on a de même, en remarquant que le parallélisme de $L\Omega$ et de la tangente en H à la courbe n entraîne la même valeur ϵ pour l'angle de contingence au point α ,

$$d(L) = L\beta \times \epsilon.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{L\beta}{HD} = \frac{LS}{HE},$$

égalité qui montre que la parallèle à HE menée par L et la parallèle à ON menée par β se coupent en un point F situé sur OD . De là, la construction du point β . On n'a plus, de ce point, qu'à abaisser sur $L\Omega$ la perpendiculaire $\beta\alpha$ pour avoir le point α cherché.

6. *Centre de courbure Ω' de la développée c' .* — Si γ est le point où la normale $\alpha\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$ coupe la normale ΩK à la développée c' , on a

$$\frac{d(L)}{d(\Omega)} = \frac{L\beta}{\Omega\gamma}, \quad \frac{d(\Omega)}{d(M')} = \frac{\Omega\Omega'}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR}.$$

Par multiplication, on tire de là

$$1 = \frac{L\beta \times \Omega\Omega'}{\Omega\gamma \times LR},$$

ou

$$\frac{\Omega\Omega'}{\Omega\gamma} = \frac{LR}{L\beta}.$$

On déduit de cette égalité que si la parallèle à $\alpha\beta$ (perpendiculaire à $L\Omega$) menée par le point R coupe LM' au point U , le centre de courbure cherché Ω' se trouve sur la droite αU . Comme il est d'ailleurs sur la normale ΩK , sa détermination est complète.

Le problème posé se trouve ainsi résolu.

7. *Simplification pour le cas où l'adjointe n est une droite.*

— Si l'adjointe n est une droite, rien n'est modifié à la construction du point R . De même, la droite RU est toujours perpendiculaire à $L\Omega$; mais il devient inutile d'effectuer une construction pour avoir le point α où $L\Omega$ touche son enveloppe. En effet, la droite $L\Omega$ étant parallèle à la tangente en H à la courbe n , et celle-

menant par le point L où elle rencontre HM la parallèle LΩ à la tangente HT à l'adjointe n .

Ici encore *le point I où LM' touche son enveloppe* s'obtient en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent les perpendiculaires élevées respectivement à PM' en M' et à ΩM en Ω.

Pour avoir *la normale au lieu décrit par le point L*, remarquons que la deuxième et la troisième des égalités du n° 4 subsistent telles quelles, savoir :

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\Omega}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR};$$

mais que la première doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{d(L)}{d(M)} = \frac{LT}{MT},$$

T étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et T. Dès lors, on obtient par multiplication

$$\frac{LT}{MT} = \frac{LR}{M\Omega}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$M\Omega \sin TML = LR \sin TLM,$$

ou, en abaissant des points R et Ω sur LM les perpendiculaires Rr et Ωω, et observant que les angles ΩMT et RLT sont droits,

$$M\Omega \sin M\Omega\omega = LR \sin LRr,$$

c'est-à-dire

$$M\omega = Lr.$$

Les points L, M et ω étant connus, on déduit de là le point r. Il n'y a plus dès lors, pour avoir le point R de la normale LR cherchée, qu'à prendre l'intersection de KI et de la perpendiculaire élevée en r à LM.

De même, pour *la détermination du point où LΩ touche son enveloppe*, la seconde et la troisième égalité du n° 5 restant les mêmes, il faut remplacer la première par la suivante :

$$\frac{d(L)}{d(H)} = \frac{L\pi}{H\pi},$$

τ étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et H, tangentes qui sont maintenant toutes deux connues, puisque $H\tau$ est donnée et que $L\tau$ est perpendiculaire à LR. Dès lors on a, D étant le centre de courbure de n et β le point où LR est coupée par la normale $\alpha\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$,

$$\frac{L\tau}{H\tau} = \frac{L\beta}{HD},$$

ou

$$\frac{L\tau}{L\beta} = \frac{H\tau}{HD},$$

ce qui prouve l'égalité des angles $L\tau\beta$ et $H\tau D$ et, conséquemment, celle des angles $H\tau L$ et $D\tau\beta$. Mais, si HD coupe LR en Q, les angles τLQ et τHQ étant droits, l'angle HQL égale l'angle $H\tau L$ et, par suite, l'angle $D\tau\beta$. Les points Q, β , D, τ sont donc sur un même cercle.

De là, la détermination du point β et, par suite, du point α , pied de la perpendiculaire abaissée de β sur $L\Omega$.

Le reste de la solution est le même que précédemment. On prend le point de rencontre U de LM' et de la perpendiculaire à $L\Omega$ menée par R, et l'on tire la droite $U\alpha$; elle donne sur ΩK le centre de courbure Ω' cherché.

Ici encore s'applique d'ailleurs la remarque du n° 7, lorsque l'adjointe n est une droite.

9. A titre d'application, prenons une parabole et donnons-nous comme pôle P un point quelconque de l'axe, comme pôle O le point à l'infini de cet axe.

La sous-normale de la parabole étant constante, la courbe n sera ici une perpendiculaire à l'axe. Donc, pour avoir le centre de courbure Ω (*fig.* 3), nous n'avons, après avoir pris le point de rencontre L de la perpendiculaire élevée à la normale MM' par le point M' où elle coupe l'axe et de la parallèle à l'axe menée par le point M, qu'à abaisser de ce point la perpendiculaire $L\Omega$ sur l'axe.

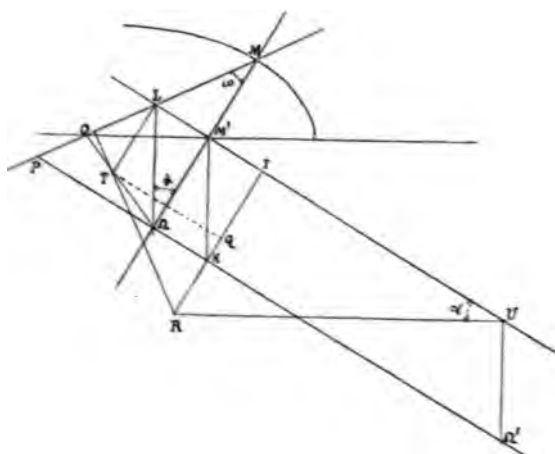
Du point K où se rencontrent les perpendiculaires respectivement élevées à l'axe en M' et à MM' en Ω , abaissons sur LM' la perpendiculaire KI. Le point R est déterminé sur cette droite par la condition que sa projection r sur LM soit à une distance de L.

10. Il est intéressant de voir comment on peut, de ce qui précède, déduire le théorème de Maclaurin pour le cas des coniques à centre.

Je rappellerai d'abord que si l'on place le pôle O au centre et le pôle P sur un des axes de la conique, l'adjointe n est alors une droite perpendiculaire à cet axe.

Dès lors, après avoir obtenu le centre de courbure Ω de la conique en menant $M'L$ perpendiculaire à la normale MM' (fig. 4),

Fig. 4.



et LQ perpendiculaire à l'axe OM' (*), on construit le centre de courbure Ω' de la développée par le tracé suivant, qui résulte de l'application directe de ce que l'on a vu plus haut (n° 3 et 4), avec la simplification indiquée au n° 7 :

Par K , intersection de la perpendiculaire $M'K$ à OM' et de la perpendiculaire QK à $M'Q$, menons la perpendiculaire KI à LM' . La parallèle à QM' menée par L coupant OQ au point T , menons, par ce point, à OM une perpendiculaire qui rencontre KI en R . Il suffit alors de mener RU parallèle à OM' et UQ' perpendiculaire à cette droite pour obtenir sur la normale QR à la développée le centre de courbure Q' de cette courbe. Prolongeons

(*) C'est la construction de M. Mannheim qui se trouve ainsi déduite de la construction générale dérivant de la considération de l'adjointe n .

$\Omega\Omega'$ jusqu'à son intersection P avec le diamètre OM. Posons

$$LM = l, \quad \Omega M = \rho, \quad \Omega\Omega' = \rho', \quad \Omega P = \alpha, \quad \widehat{OMM'} = \omega, \quad \widehat{L\Omega M} = \alpha;$$

nous avons $MM' = l \cos \omega$, puis, dans le triangle OMM',

$$OM = MM' \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \omega\right)} = l \frac{\cos \omega \cos \alpha}{\cos(\alpha + \omega)}.$$

Maintenant les triangles semblables OTL et O Ω M donnent

$$\begin{aligned} TL &= \rho \frac{OL}{OM} = \rho \left(1 - \frac{l}{OM}\right) = \rho \left[1 - \frac{\cos(\alpha + \omega)}{\cos \alpha \cos \omega}\right] \\ &= \rho \tan \alpha \tan \omega = h \tan \alpha. \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le rayon de courbure $\Omega\Omega' = \rho'$.

Nous avons

$$\rho' = LU = LI + IU.$$

Mais

$$LI = 2 LM' = 2 l \sin \omega;$$

et

$$\begin{aligned} IU &= RU \cot \alpha = (RQ + QI) \cot \alpha \\ &= (TQ \tan \omega + TL) \cot \alpha \\ &= (2 l \sin \omega \tan \omega + h \tan \alpha) \cot \alpha \\ &= 2 l \sin \omega \tan \omega \cot \alpha + h. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \rho' &= 2 l \sin \omega (1 + \tan \omega \cot \alpha) + h \\ &= 2 l \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin \alpha} \tan \omega + h. \end{aligned}$$

Or le triangle L Ω M donne

$$\frac{\rho}{l} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin \alpha};$$

par suite

$$\rho' = 2 \rho \tan \omega + h = 3h,$$

ce qui démontre le théorème de Maclaurin :

Le rayon de courbure $\Omega\Omega'$ de la développée d'une conique est égal au triple du segment P Ω de la normale à cette développée, compris entre le centre de courbure Ω et le diamètre OM.

Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques; par M. G. FOURET.

1. M. Jamet a fait connaître en 1887 ⁽¹⁾ une propriété intéressante du rayon de courbure de deux classes de courbes, déjà étudiées antérieurement par de La Gournerie ⁽²⁾, sous le nom de *courbes triangulaires symétriques* et de *courbes tétraédrales symétriques*.

Les premières, rapportées à un triangle de référence convenablement choisi, ont une équation ponctuelle de la forme

$$Ax^n + By^n + Cz^n = 0.$$

L'exposant n , qui peut être quelconque, positif ou négatif, est appelé *l'exposant de la courbe*. Le triangle de référence a reçu le nom de *triangle de symétrie de cette courbe*.

Les courbes de la seconde classe résultent de l'intersection de deux surfaces qui, rapportées à un même tétraèdre de référence convenablement choisi, ont respectivement pour équations ponctuelles des équations de la forme

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0,$$

$$A'x^n + B'y^n + C'z^n + D't^n = 0.$$

Ces équations définissent chacune une surface appelée par de La Gournerie *surface tétraédrale symétrique*. Le nombre n , d'ailleurs positif ou négatif, est en même temps l'exposant de ces surfaces et l'exposant de la courbe tétraédrale symétrique, qui en est l'intersection. Le tétraèdre de référence est appelé *tétraèdre de symétrie de la courbe*.

2. Je me propose de démontrer ici, par des considérations géométriques fort simples, deux théorèmes auxquels M. Jamet est parvenu, en suivant la voie analytique ⁽³⁾. Je vais m'appuyer pour cela sur la remarque suivante, qui résulte d'une formule élé-

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. IV, supplément, p. 19.

(2) *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques* (année 1867).

(3) J'ai déjà fait une première Communication verbale sur ce même sujet dans la séance du 7 mai 1890.

gante ⁽¹⁾ due à M. le général Peaucellier, mais que j'établirai directement.

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes tangentes dans un même plan, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

Soient, dans un plan,

(C) et (C') deux courbes tangentes en un certain point m ,
(O) et (O') les cercles respectivement osculateurs à ces deux courbes en m ,
R et R' les rayons respectifs de ces cercles.

Ces cercles peuvent être considérés comme homothétiques, le centre d'homothétie étant le point m et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{R}{R'}$.

Faisons subir à la figure une transformation homographique quelconque. Les courbes (C) et (C') deviennent deux nouvelles courbes (Γ) et (Γ') tangentes au point μ , homologue de m . Les cercles (O) et (O') se changent respectivement en deux coniques (Ω) et (Ω') osculatrices en μ , la première à la courbe (Γ), la seconde à la courbe (Γ'). Ces deux courbes sont homologues; elles ont le point μ pour centre d'homologie, et pour axe d'homologie la droite Δ, à laquelle correspond, dans la figure primitive, la droite de l'infini.

Par le point μ faisons passer une droite Δ infiniment voisine de la tangente en ce point aux deux coniques (Ω) et (Ω'); la droite Δ coupe respectivement les deux courbes en deux points α et α' infiniment voisins de μ . Si ν est le point de rencontre de la sécante considérée avec Δ, on a évidemment

$$(1) \quad \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'} : \frac{\nu\alpha}{\nu\alpha'} = \frac{m\alpha}{m\alpha'} = \frac{R}{R'},$$

α et α' étant les seconds points d'intersection des cercles (O) et

(¹) *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective*, par M. Peaucellier, capitaine du Génie (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, t. XX, p. 427).

(O') avec la droite L de la première figure qui correspond à la droite A de la seconde.

Considérons maintenant deux cercles (ω) et (ω') tangents en μ à (Ω) et (Ω') et passant le premier par le point α , le second par le point α' . Ces cercles, lorsque α et α' viennent coïncider avec μ , deviennent respectivement les cercles osculateurs en μ aux coniques (Ω) et (Ω'), par conséquent aux courbes (Γ) et (Γ'). En désignant par ρ et ρ' les rayons de ces cercles osculateurs, on a

$$(2) \quad \frac{\rho}{\rho'} = \lim. \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'},$$

et, en observant que $\frac{\nu\alpha}{\nu\alpha'}$ tend vers 1, on conclut de la comparaison des relations (1) et (2)

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{R}{R'}.$$

3. *Remarque.* — Deux courbes gauches ayant, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, se transforment par homographie en deux courbes gauches ayant, en un même point, même tangente et même plan osculateur. On peut, d'ailleurs, répéter identiquement les raisonnements qui viennent de nous servir dans le cas des courbes planes; de sorte que l'on peut énoncer ce théorème :

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes qui ont, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

4. Considérons la courbe définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$(3) \quad r^n \cos n\theta = k$$

ou, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$(4) \quad (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2k.$$

Une pareille courbe, comme le montre l'équation (4), est une courbe triangulaire symétrique, dont le triangle de symétrie a pour sommets l'origine des coordonnées O et les points cycliques I et J, par lesquels passent à l'infini tous les cercles du plan.

On sait, d'autre part, et l'on démontre aisément, au moyen de l'équation (3), que *le rayon de courbure R en un point M quelconque de la courbe ainsi définie est dans un rapport constant, égal à $\frac{1}{1-n}$, avec le segment de la normale correspondante compris entre le point M et le point d'intersection N de la perpendiculaire élevée en O à OM.*

Mais on peut interpréter d'une autre manière cette propriété, en remarquant que MN est le diamètre du cercle passant par le point O et tangent en M à la courbe (3). En désignant par R' le rayon de ce cercle, on a

$$(5) \quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{1-n}.$$

§. Faisons maintenant subir une transformation homographique imaginaire à la figure précédente. En choisissant convenablement cette transformation, on changera la courbe (3) en l'une quelconque des courbes triangulaires symétriques d'exposant n . Le cercle décrit sur MN, comme diamètre, deviendra une conique tangente à la courbe triangulaire et circonscrite à son triangle de symétrie. Enfin le rapport des rayons de courbure, en leur point de contact, de la courbe triangulaire et de la conique qui vient d'être définie, n'étant pas altéré par la transformation (art. 2), ce rapport, en vertu de la relation (5), sera égal à $\frac{2}{1-n}$. Ainsi se trouve démontré le théorème suivant dû à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe triangulaire symétrique d'exposant n , est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la conique tangente en ce point à la courbe et circonscrite au triangle de symétrie.

La construction du rayon de courbure d'une courbe triangulaire symétrique se trouve ainsi ramenée à la construction du rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points. J'ai traité cette question précédemment (1); je n'y reviendrai pas ici.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 778. Voir égale-

6. Considérons une courbe tétraédrale symétrique d'exposant quelconque n . M. Jamet a démontré que *la cubique gauche tangente, en un point quelconque, à une pareille courbe et passant par les sommets de son tétraèdre de symétrie a , au point de contact, même plan osculateur que cette courbe.*

Il résulte de là, en vertu d'une remarque précédente (art. 3), que le rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique ainsi déterminée se conserve dans une transformation homographique quelconque. Faisons, en particulier, une perspective de la figure sur l'une des faces du tétraèdre de symétrie, en prenant comme centre de projection le sommet opposé de ce tétraèdre. La courbe tétraédrale d'exposant n se projette suivant une courbe triangulaire symétrique d'exposant n , la cubique suivant une conique tangente à cette courbe et circonscrite à son triangle de symétrie. Or les rayons de courbure de ces deux dernières courbes sont dans un rapport constant et égal à $\frac{2}{1-n}$ (art. 5).

Donc il en est de même du rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique. De là ce théorème, dû également à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe tétraédrale symétrique d'exposant n , est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la cubique gauche tangente en ce point à la courbe et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.

Les considérations dont je viens de faire usage dans le dernier paragraphe de la présente Note sont empruntées à une Communication faite par M. Demoulin, dans la séance du 4 mai dernier. Je les ai reproduites ici, parce qu'elles m'ont paru ajouter à l'intérêt de la question que je me suis proposé de traiter; mais j'en laisse tout le mérite à ce jeune géomètre distingué.

ment sur ce sujet deux Notes de M. Mannheim (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 619, et *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 155).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Élie Perrin : *Quelques remarques sur la démonstration d'un théorème d'Arithmétique.*

M. d'Ocagne : *Sur une transformation géométrique conduisant à la construction de courbes unicursales par points et par tangentes.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur un problème de Géométrie.

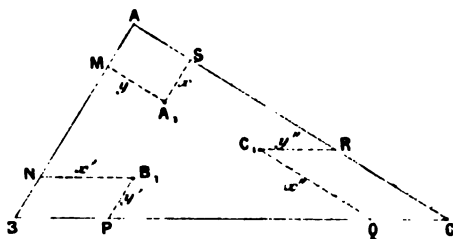
L'énoncé suivant m'a été communiqué, il y a bien des années déjà, par M. Lemoine. Je ne crois pas qu'il l'ait publié, ni qu'une solution en ait été donnée :

Trois points A_1, B_1, C_1 ont respectivement pour coordonnées $x, y; x', y'; x'', y''$ par rapport aux côtés $AB, AC; BC, BA; CA, CB$ d'un triangle, pris pour axes coordonnés.

Connaissant A_1, B_1, C_1 , et les six valeurs x, y, x', y', x'', y'' , trouver le triangle ABC .

Mon intention n'est pas de donner ici une solution de cette

Fig. 1.



question, et je ne crois pas qu'il soit aisé ni même possible d'en trouver une simple. Je veux simplement montrer théoriquement

comment on pourrait la résoudre, et surtout en indiquer une transformation assez curieuse.

Si nous appelons α, β, γ les inclinaisons des trois droites incon-
nues BC, CA, AB sur une direction fixe quelconque, et si nous
posons (*voir la fig. 1*) :

$$MN = \omega \epsilon \gamma \quad PQ = u \epsilon \alpha, \quad RS = v \epsilon \beta,$$

nous avons évidemment les trois équipollences

$$(1) \quad \begin{cases} x' \epsilon \alpha + y \epsilon \beta + \omega \epsilon \gamma = A_1 B_1, \\ u \epsilon \alpha + x'' \epsilon \beta + y' \epsilon \gamma = B_1 C_1, \\ y'' \epsilon \alpha + v \epsilon \beta + x \epsilon \gamma = C_1 A_1. \end{cases}$$

Ce système contient six inconnues $\alpha, \beta, \gamma, u, v, \omega$, et il équi-
vaut à six équations algébriques.

Il est donc bien déterminé. On verrait d'ailleurs qu'une fois les
valeurs $\alpha, \beta, \gamma, u, v, \omega$ obtenues, la construction des points A,
B, C serait des plus simples.

La résolution du système (1) peut être effectuée de la façon sui-
vante, que nous indiquons seulement. On en tire les valeurs de $\epsilon \alpha$,
 $\epsilon \beta$, $\epsilon \gamma$ en considérant les équipollences comme des équations li-
néaires; et l'on multiplie l'expression de $\epsilon \alpha$ par sa conjuguée, ce
qui donne pour produit 1. De même pour $\epsilon \beta$, $\epsilon \gamma$. On a donc ainsi
trois équations en u, v, ω . Mais chacune d'elles est du sixième de-
gré, ce qui paraît indiquer presque l'impossibilité d'une solution
simple, à moins de réductions imprévues.

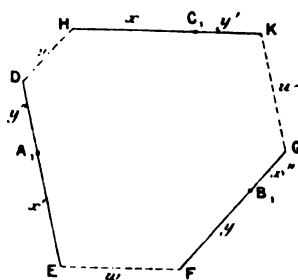
Mais le problème, comme nous le disions plus haut, se trans-
forme en un autre équivalent, par la considération des équipol-
lences (1) qui en traduisent l'énoncé. Prenons, en effet, par
exemple, la première de ces équipollences. Le premier membre
doit représenter une ligne brisée de trois tronçons partant de A,
pour aboutir en B₁; le premier tronçon a pour longueur donnée
 x' ; un autre a pour longueur y ; et il faut que le tronçon qui com-
plète la ligne brisée ait pour direction γ . En répétant la même ob-
servation sur les deux autres équipollences, nous arrivons ainsi à
reconnaître que la question peut prendre la forme que voici :

*Étant donnés sur un plan trois segments DE, FG, KH pou-
vant pivoter chacun autour d'un point fixe A₁, B₁, C₁, qui lui*

appartient, orienter ces segments de telle sorte que les droites GK, HD, EF soient parallèles à DE, FG, KH respectivement.

Les longueurs données sont représentées sur la figure et celles

Fig. 2.



de GK, HD, EF sont précisément u, v, w .

Cet énoncé nouveau ne conduirait pas à une solution plus simple, si ce n'est peut-être au point de vue graphique et par tâtonnements. Il est, en tous cas, d'apparence assez différente de la question primitive, bien que le problème soit identiquement le même.

SÉANCE DU 20 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Laisant lit une lettre d'Abel Transon, écrite en 1868, et relative aux principes du Calcul directif.

M. Emile Picard transmet une Note de M. Mangeot intitulée : *Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales.*

M. Félix Lucas : *Sur la théorie des courants polyphasés.*

M. Raffy présente une Note de M. Caronnet : *Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les singularités des courbes algébriques planes.

1. Les nombres qui entrent dans les formules de Plücker sont

deux à deux corrélatifs, sauf le genre p qui est dualistique. Les nombres corrélatifs sont :

- 1° Le degré n et la classe k ;
- 2° Le nombre des points doubles d et celui des tangentes doubles t ;
- 3° Le nombre des points de rebroussement r et celui des tangentes d'inflexion i .

L'égalité de deux nombres corrélatifs n'entraîne pas toujours celles des autres ; car pour les cubiques de genre $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} n = 3, & \quad d = 0, & \quad r = 0, \\ k = 6, & \quad t = 0, & \quad i = 9. \end{aligned}$$

Mais ce fait est exceptionnel. En effet, on peut déduire des formules de Plücker les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 3(n - k) &= r - i, \\ 2(d - t) &= (n - k)(n + k - 9); \end{aligned}$$

de sorte que

- 1° Si $n = k$, on a $r = i$, $d = t$;
- 2° Si $r = i$, on a $n = k$, $d = t$;
- 3° Si $d = t$, on peut avoir soit $n = k$ et $r = i$, soit $n + k = 9$; cette dernière solution conduit aux cas suivants corrélatifs deux à deux :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} n = 3, & k = 6, & d = t = 0, & r = 0, & i = 9, & p = 1; \\ n = 6, & k = 3, & d = t = 0, & r = 9, & i = 0, & p = 1. \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} n = 4, & k = 5, & d = t = 2, & r = 1, & i = 4, & p = 0; \\ n = 5, & k = 4, & d = t = 2, & r = 4, & i = 1, & p = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En résumé, sauf les cas que je viens d'énumérer, l'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne celle des autres.

2. La présence de points multiples abaissant la classe d'une courbe, on pourrait penser que, parmi les courbes d'un degré n donné, celles dont la classe a la plus petite valeur sont les courbes unicursales, d'autant plus que c'est ce qui se produit pour les valeurs inférieures de n , $n = 3, 4$ ou 5 . Mais cela n'est plus vrai

pour les valeurs supérieures, cela tient à ce que l'on a la relation suivante :

$$2k = n + 2 - 2p + i,$$

d'où l'on déduit, i ne pouvant être négatif,

$$k \geq \frac{n+2}{2} - p.$$

Il est facile de vérifier que l'on peut toujours trouver des nombres positifs satisfaisant aux relations de Plücker et tels que pour $p=1$, par exemple, on puisse obtenir une valeur de k inférieure à la valeur minima qui correspondrait à $p=0$. Il est vrai qu'il n'est pas démontré qu'à tout système de nombres positifs vérifiant les formules de Plücker il correspond une courbe. Mais il résulte des Tableaux donnés par Clebsch (*Leçons de Géométrie*, trad. Benoist, t. II, p. 68) que les courbes du 6^e, du 7^e, du 8^e degré de classe minima sont de genre 1; celles du 9^e et du 10^e degré sont de genre 2; celles du 12^e degré sont de genre 3; ces courbes ayant une existence effective comme le montrent des exemples.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Égalités à deux et à trois degrés; par M. Michel FROLOV.

Le but unique de la science, c'est l'honneur
de l'esprit humain, et, sous ce titre une
question des nombres vaut autant qu'une
question du système du monde.

JACOBI à LEGENDRE.

1. Dans notre Mémoire *Sur les égalités à deux degrés*, en 1889, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, nous avons démontré que les égalités à plusieurs degrés, consécutifs et entiers, sont susceptibles de différentes transformations. Ainsi, on peut augmenter ou diminuer de la même quantité tous les termes d'une égalité; les multiplier ou diviser par la même quantité; retrancher tous ces termes d'une même quantité, additionner les égalités les unes aux autres, etc.

Dans ce second Mémoire, nous voulons compléter ces études relativement aux égalités à deux et à trois degrés.

2. Appelons S_1, S_2 et S_3 les sommes des premières, deuxièmes et troisièmes puissances des nombres d'un groupe, et conservons les signes $\perp$ et Δ pour désigner les égalités à deux et à trois degrés, que nous avons adoptés dans le premier Mémoire.

Prenons l'égalité à trois degrés composée des plus petits nombres

$$1, 5, 8, 12 \Delta 2, 3, 10, 11 \quad (S_1 = 26; \quad S_2 = 234; \quad S_3 = 2366).$$

Augmentons tous les termes de 2,

$$3, 7, 10, 14 \Delta 4, 5, 12, 13,$$

et additionnons les deux égalités, en supprimant les nombres communs à deux groupes,

$$1, 7, 8, 14 \Delta 2, 4, 11, 13 \quad (S_1 30; \quad S_2 = 310; \quad S_3 = 3600).$$

Cette égalité se déduit aussi directement de l'identité

$$1, 4, 2, 5 \Delta 2, 1, 5, 4,$$

en ajoutant à ses termes la suite additionnelle 0, 1, 2, 3, jusqu'à ce que tous les termes prennent des valeurs différentes, comme nous l'avons fait dans le n° 9 du premier Mémoire, pour former les égalités à deux degrés. En continuant l'addition de cette suite, on obtient

$$1, 8, 10, 17 \Delta 2, 5, 13, 16(36; \quad 454; \quad 6126),$$

$$1, 9, 12, 20 \Delta 2, 6, 15, 19(42; \quad 626; \quad 10458),$$

$$1, 10, 14, 23 \Delta 2, 7, 17, 22(48; \quad 826; \quad 15912),$$

$$1, 11, 16, 26 \Delta 2, 8, 19, 25(54; \quad 1054; \quad 23004),$$

$$1, 12, 18, 29 \Delta 2, 9, 21, 28(68; \quad 1310; \quad 31950),$$

$$1, 13, 20, 32 \Delta 2, 10, 23, 31(66; \quad 1594; \quad 42966),$$

et ainsi de suite.

On peut déduire de ces égalités une grande quantité d'autres au moyen des transformations indiquées plus haut. Par exemple, en additionnant les termes des deux dernières et en les diminuant de l'unité, on trouve

$$1, 24, 37, 60 \Delta 3, 18, 43, 58(122; \quad 5546; \quad 280478).$$

Voici encore quelques égalités de cinq, six et sept termes :

$$\begin{aligned}
 &1, 4, 8, 12, 17 \Delta 2, 3, 7, 11, 16, & (42; 514; 7218), \\
 &1, 6, 10, 14, 17 \Delta 2, 4, 11, 15, 16 & (48; 622; 8874), \\
 &1, 4, 6, 9, 11, 11 \Delta 2, 3, 5, 10, 12, 13 & (45; 451; 5085), \\
 &1, 5, 6, 12, 13, 17 \Delta 2, 3, 7, 11, 15, 16 & (54; 664; 9180), \\
 &1, 10, 23, 27, 31, 44, 69 \Delta 3, 11, 20, 21, 34, 49, 67 (205; 9017; 476335), \\
 &1, 14, 24, 28, 32, 45, 70 \Delta 4, 12, 21, 25, 34, 50, 68 (214; 9506; 505414).
 \end{aligned}$$

Ces exemples suffisent pour montrer avec quelle facilité se forment les égalités à trois degrés.

3. S'il y a égalité des sommes des premières et des troisièmes puissances des termes de deux ou de plusieurs groupes, il n'en résulte pas qu'il existe aussi l'égalité des sommes de leurs deuxièmes puissances, comme le font voir les exemples suivants :

On a

$$(1) \quad \begin{cases} 1 + 8 + 13 + 14 = 2 + 7 + 12 + 15 = 36, \\ 1^3 + 8^3 + 13^3 + 14^3 = 2^3 + 7^3 + 12^3 + 15^3 = 5454. \end{cases}$$

Mais

$$1^2 + 8^2 + 13^2 + 14^2 = 430,$$

et

$$2^2 + 7^2 + 12^2 + 15^2 = 422.$$

On a

$$(2) \quad \begin{cases} 1 + 5 + 10 + 14 + 19 = 2 + 4 + 9 + 16 + 18 = 49, \\ 1^3 + 5^3 + 10^3 + 14^3 + 19^3 = 2^3 + 4^3 + 9^3 + 16^3 + 18^3 = 10729. \end{cases}$$

Mais

$$1^2 + 5^2 + 10^2 + 14^2 + 19^2 = 683,$$

et

$$2^2 + 4^2 + 9^2 + 16^2 + 18^2 = 681.$$

On peut aussi avoir égalité des sommes des troisièmes puissances, sans égalité des sommes ni des premières, ni des deuxièmes puissances. Par exemple, on a

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 11^3 + 13^3 = 2^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 = 3681,$$

tandis que

$$\begin{aligned}
 &1^2 + 3^2 + 5^2 + 11^2 + 13^2 = 325 & \text{et} & & 2^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 = 365, \\
 &1 + 3 + 5 + 11 + 13 = 33 & \text{et} & & 2 + 6 + 9 + 10 + 12 = 39.
 \end{aligned}$$

Remarquons encore que l'égalité des sommes des puissances de degrés entiers n'est jamais suivie de celle des sommes des puis-

sances de degrés fractionnaires, ce qui est évident, car les radicaux aux indices fractionnaires sont des nombres irrationnels.

Voici un exemple qui fera voir comment balancent les sommes pour les degrés fractionnaires en devenant plus grandes, tantôt pour l'un, tantôt pour l'autre groupe :

$$\begin{aligned}
 1^0 + 14^0 + 22^0 + 35^0 &= 1^0 + 11^0 + 25^0 + 34^0 = 4, \\
 1^{\frac{1}{2}} + 14^{\frac{1}{2}} + 22^{\frac{1}{2}} + 35^{\frac{1}{2}} &= 15, 25, \quad 2^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}} + 25^{\frac{1}{2}} + 34^{\frac{1}{2}} = 15, 56, \\
 1^1 + 14^1 + 22^1 + 35^1 &= 2^1 + 11^1 + 25^1 + 34^1 = 72, \\
 1^{\frac{3}{2}} + 14^{\frac{3}{2}} + 22^{\frac{3}{2}} + 35^{\frac{3}{2}} &= 363, 63, \quad 2^{\frac{3}{2}} + 11^{\frac{3}{2}} + 25^{\frac{3}{2}} + 34^{\frac{3}{2}} = 362, 56, \\
 1^2 + 14^2 + 22^2 + 35^2 &= 2^2 + 11^2 + 25^2 + 34^2 = 1906, \\
 1^{\frac{5}{2}} + 14^{\frac{5}{2}} + 22^{\frac{5}{2}} + 35^{\frac{5}{2}} &= 10271, 00, \quad 2^{\frac{5}{2}} + 11^{\frac{5}{2}} + 25^{\frac{5}{2}} + 34^{\frac{5}{2}} = 10273, 00, \\
 1^3 + 14^3 + 22^3 + 35^3 &= 2^3 + 11^3 + 25^3 + 34^3 = 56268.
 \end{aligned}$$

4. La méthode employée dans le premier Mémoire pour la répartition en plusieurs groupes égaux à deux degrés d'une progression arithmétique peut aussi être appliquée à la répartition des nombres en groupes égaux à trois et à plus de degrés.

Soit une progression des nombres naturels,

$$1, 2, 3 \dots (m-2), (m-1), m, (m+1), (m+2), (m+3) \dots 2m.$$

Nommons R la somme des cubes de deux nombres du milieu m et $(m+1)$ et u la quantité $(12m+6)$. Alors les sommes des cubes

$$(m-1)^3 + (m+2)^3, (m-2)^3 + (m+3)^3, (m-3)^3 + (m+4)^3, \dots$$

seront respectivement égales à

$$R + u, R + 3u, R + 6u, R + 10u, \dots,$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier la quantité u par les nombres figurés du premier ordre ou nombres triangulaires

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \dots, \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il s'ensuit que pour répartir $2m$ nombres consécutifs en m groupes égaux à trois degrés, il suffit de répartir en m groupes égaux à un degré les $(m-1)$ premiers nombres triangulaires, en y ajoutant 0, dont la somme est égale au nombre figuré du second ordre ou nombre pyramidal $\frac{(m-1)m(m+1)}{6}$.

5. Il est possible de répartir en deux groupes les huit premiers nombres triangulaires

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,$$

dont la somme est égale à 84, car on a

$$0 + 6 + 15 + 21 = 1 + 3 + 10 + 28 = 42.$$

Dans ce cas $m = 8$. En remplaçant les nombres triangulaires par des couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés

$$1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 \Delta 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15,$$

donnant les sommes

$$S_1 = 68, \quad S_2 = 748, \quad S_3 = 9248.$$

La somme des premiers dix-huit nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 969, on peut les répartir en trois groupes de 323, des deux manières suivantes :

1.

$$\begin{aligned} 0 + 15 + 28 + 55 + 105 + 120 &= 1 + 10 + 36 + 45 + 78 + 153 \\ &= 3 + 6 + 21 + 66 + 91 + 136. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 + 15 + 36 + 45 + 91 + 136 &= 1 + 10 + 21 + 66 + 105 + 120 \\ &= 3 + 6 + 28 + 55 + 78 + 153, \end{aligned}$$

qui donnent deux systèmes de répartition des trente-six nombres

1.

$$\begin{aligned} 1, 6, 9, 10, 14, 17, 20, 23, 27, 28, 31, 36 \Delta, \\ 2, 5, 7, 12, 15, 16, 21, 22, 25, 30, 32, 35 \Delta, \\ 3, 4, 8, 11, 13, 18, 19, 24, 26, 29, 33, 34. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 1, 6, 8, 11, 15, 16, 21, 22, 26, 29, 31, 36 \Delta, \\ 2, 5, 9, 10, 13, 18, 19, 24, 27, 28, 32, 35 \Delta, \\ 3, 4, 7, 12, 14, 17, 20, 23, 25, 30, 33, 34, \end{aligned}$$

pour lesquels

$$S_1 = 222, \quad S_2 = 5402, \quad S_3 = 147852.$$

La somme des vingt-cinq premiers nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 2600, on peut répartir ces nombres en cinq groupes de 520 :

$$\begin{aligned} 0 + 45 + 55 + 120 + 300, \\ 1 + 28 + 91 + 190 + 210, \\ 3 + 15 + 78 + 171 + 253, \\ 6 + 36 + 66 + 136 + 276, \\ 10 + 21 + 105 + 153 + 231. \end{aligned}$$

En remplaçant les nombres triangulaires par les couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés :

$$\begin{aligned} 1, 10, 15, 16, 25, 26, 35, 36, 41, 50 \Delta, \\ 2, 9, 14, 17, 22, 29, 34, 37, 42, 49 \Delta, \\ 3, 7, 13, 20, 23, 28, 31, 38, 44, 48 \Delta, \\ 4, 8, 11, 19, 21, 30, 32, 40, 43, 47 \Delta, \\ 5, 6, 12, 18, 24, 27, 33, 39, 45, 46, \end{aligned}$$

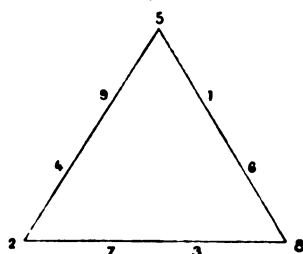
qui donne

$$S_1 = 255, \quad S_2 = 8585, \quad S_3 = 325125.$$

6. Dans notre premier Mémoire, nous n'avons donné qu'une méthode pour la répartition de $2n^2$ nombres en n groupes égaux à deux degrés. Mais, comme ces égalités furent dernièrement appliquées à des figures plus ou moins intéressantes, il ne sera pas de trop de revenir à ces égalités pour en dire quelques mots.

On commença par disposer des nombres appartenant à des

Fig. 1.



groupes égaux à deux degrés sur les périmètres des triangles et des carrés, comme le montrent les *fig.* 1, 2, 3.

L'égalité représentée par la *fig.* 1 s'obtient de la manière suivante :

On prend deux égalités données dans le premier Mémoire

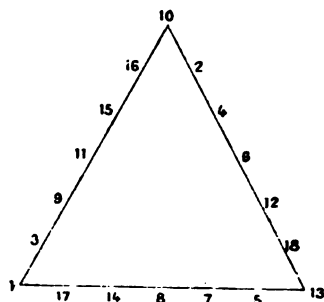
$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7, \quad 1, 6, 8 \perp 2, 4, 9.$$

En remarquant que les premiers groupes de ces égalités ne diffèrent entre eux que par les nombres 5 et 8, on ajoute à la première le 4^e terme 8 et à la seconde 5, et l'on obtient trois groupes égaux

$$1, 5, 6, 8 \perp 2, 3, 7, 8 \perp 2, 4, 5, 9 \quad (S_1 = 20, S_2 = 126).$$

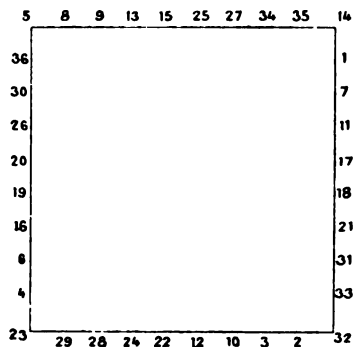
Voici les égalités de ces figures :

Fig. 2.



$$1, 3, 9, 10, 11, 15, 16 \perp 1, 5, 7, 8, 13, 14, 17 \perp 2, 4, 6, 10, 12, 13, 18 \\ (S_1 = 65, S_2 = 793).$$

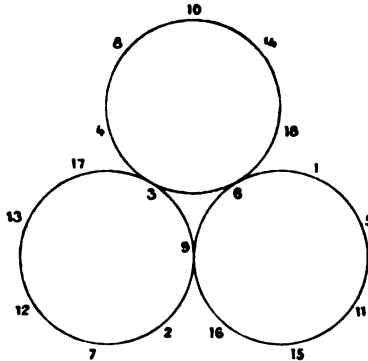
Fig. 3.



$$1, 7, 11, 14, 17, 18, 21, 31, 32, 33 \perp \\ 2, 3, 10, 12, 22, 23, 24, 28, 29, 32 \perp \\ 4, 5, 6, 16, 19, 20, 23, 26, 30, 36 \perp \\ 5, 8, 9, 13, 14, 15, 25, 27, 34, 35 \\ (S_1 = 185, S_2 = 4495).$$

On pourrait aussi disposer ces groupes sur les circonférences des cercles tangents entre eux, en plaçant les nombres qui se ré-

Fig. 4.



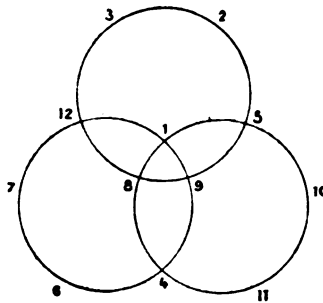
pètent dans deux groupes et se trouvent aux angles, aux points de contact, comme le montre la *fig. 4*, qui représente l'égalité

$$1, 5, 6, 9, 11, 15, 16 \perp 2, 3, 7, 9, 12, 13, 17 \perp 3, 4, 6, 8, 10, 14, 18 \\ (S_1 = 63, S_2 = 745).$$

Si les groupes ont deux nombres communs entre eux, ils peuvent être représentés par des cercles qui se coupent, comme le montrent les *fig. 5*, 6 et 7.

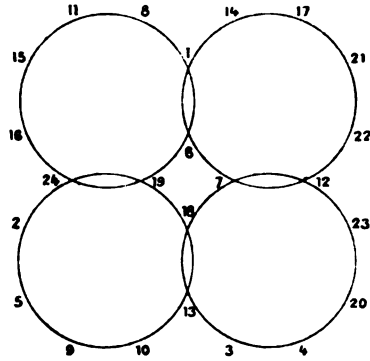
Voici leurs égalités :

Fig. 5.



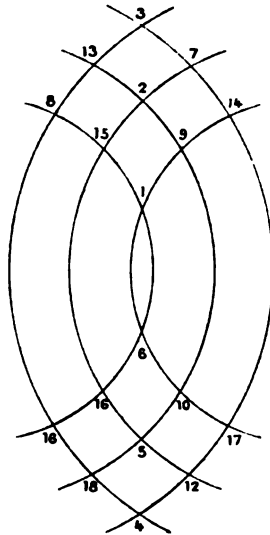
$$1, 4, 5, 8, 10, 11 \perp 1, 4, 6, 7, 9, 12 \perp 2, 3, 5, 8, 9, 12 \\ (S_1 = 39, S_2 = 323).$$

Fig. 6.



1, 6, 7, 12, 14, 17, 21, 22 $\perp$ 1, 6, 8, 11, 15, 16, 19, 24 $\perp$
 2, 5, 9, 10, 13, 18, 19, 24 $\perp$ 3, 4, 7, 12, 13, 18, 20, 23 $\perp$
 ($S_1 = 100$, $S_2 = 1640$).

Fig. 7.



1, 6, 8, 11, 15, 16 $\perp$ 1, 6, 9, 10, 14, 17 $\perp$ 2, 5, 7, 12, 15, 16 $\perp$
 2, 5, 9, 10, 13, 18 $\perp$ 3, 4, 7, 12, 14, 17 $\perp$ 3, 4, 8, 11, 13, 18
 ($S_1 = 57$, $S_2 = 703$).

Les plus intéressantes des figures numériques de cette espèce

sont les carrés magiques à deux degrés qui, sous le rapport de la difficulté, surpassent de beaucoup les carrés magiques ordinaires, ou à un degré, dont des mathématiciens se sont occupés jusqu'ici.

C'est M. G. Pfeffermann qui le premier publia des carrés à deux degrés dans les *Tablettes du Chercheur*.

Nous donnons à la page en regard deux carrés de 8 et de 9, à deux degrés.

Dans le premier, les rangées horizontales et verticales, et les deux diagonales donnent $S_1 = 260$ et $S_2 = 1180$; et dans le second $S_1 = 369$ et $S_2 = 20049$.

7. Les carrés dont les rangées sont identiques étant composés des mêmes nombres, et qui ne diffèrent entre eux que par l'arrangement et la disposition de ces rangées, ne forment que des variantes d'un même type. Il est évident que les carrés à deux et à plusieurs degrés sont susceptibles des mêmes transformations que les carrés ordinaires.

Il y a trois espèces de transformations générales des carrés que nous avons signalées dans une Note présentée, en 1886, au Congrès de Nancy de l'Association française pour l'avancement des Sciences : 1^o la rupture des carrés en deux parties, avec leur interversion; 2^o la transposition des cadres composés chacun de quatre rangées, deux horizontales et deux verticales, également éloignées du centre, en éloignant les uns et en rapprochant les autres cadres du centre; et 3^o le retournement des cadres, avec la transposition simultanée des quatre rangées de chaque cadre, de sorte que la rangée supérieure passe en bas, la rangée gauche passe à droite et réciproquement la rangée inférieure en haut et celle de droite à gauche.

Le nombre des variantes déterminé par les deux dernières transformations est égal pour n pair à

$$\frac{n-2}{2} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \frac{n-2}{2},$$

et pour n impair à,

$$\frac{n-3}{2} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \frac{n-3}{2}.$$

La rupture des carrés magiques donne deux variantes, le carré

45	23	1	59	26	36	54	16
40	30	12	50	19	41	63	5
22	48	58	4	33	27	13	55
31	37	51	9	44	18	8	62
3	57	47	21	56	14	28	34
10	52	38	32	61	7	17	43
60	2	24	46	15	53	35	25
49	11	29	39	6	64	42	20

4	77	35	11	46	57	42	27	70
63	52	1	32	24	67	17	74	39
68	33	18	75	2	37	22	61	53
73	38	23	62	16	54	3	69	31
26	72	48	76	41	6	34	10	56
51	13	79	28	66	20	59	44	9
29	21	60	45	80	7	64	49	14
43	8	65	15	58	50	81	30	19
12	55	40	25	36	71	47	5	78

primordial y compris; pour les carrés semi-diaboliques, elle produit quatre variantes et pour les carrés diaboliques n^2 variantes.

Le total des variantes d'un carré semi-magique, dans lequel l'une ou les deux diagonales donnent les sommes autres que S_1 et S_2 , est égal à

$$(P_n)^2 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)^2.$$

8. Outre cela, tout carré dont les rangées ne sont ni complémentaires les unes des autres, ni composées de nombres complémentaires, fournit un carré complémentaire, en y remplaçant tous les nombres par leurs compléments, ce qui ne trouble pas l'égalité à plusieurs degrés, comme le montre le théorème II du premier Mémoire.

On peut encore modifier les carrés et les autres figures à plusieurs degrés, en remplaçant les nombres naturels par des nombres correspondants de toute autre progression arithmétique. On peut aussi, en partageant la série des nombres naturels en m sections de p nombres, augmenter les termes des sections de quantités différentes pour toutes les sections, et puis remplacer les nombres naturels par des nombres ainsi modifiés, si les groupes sont composés des nombres pris dans toutes les sections. Par exemple, en partageant la série de 18 nombres naturels en 6 sections

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17, 18

on peut, en laissant les nombres de la première section sans augmentation, augmenter ceux des autres sections respectivement de 1, 2, 3, 4 et 5, et en remplaçant par les nombres modifiés de cette façon les nombres naturels de l'égalité

$$1, 6, 9, 10, 14, 17 \perp 2, 5, 7, 12, 15, 16 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18$$

$$(S_1 = 57, \quad S_2 = 703),$$

en déduire l'égalité suivante :

$$1, 7, 11, 13, 18, 22 \perp 2, 6, 9, 15, 19, 21 \perp 3, 5, 10, 14, 17, 23$$

$$(S_1 = 72, \quad S_2 = 1148).$$

Mais toutes les modifications de ce genre ne constituent pas de solutions particulières.

9. Établissons l'impossibilité des carrés magiques à deux degrés pour des valeurs de la racine n inférieures à 8.

Les formules générales

$$S_1 = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n^3+n}{2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{n(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$$

donnent pour

$$\begin{array}{lll} n = 3 : & S_1 = 15; & S_2 = 95, \\ n = 4 : & S_1 = 34; & S_2 = 374, \\ n = 5 : & S_1 = 65; & S_2 = 1105, \\ n = 6 : & S_1 = 111; & S_2 = 2701, \\ n = 7 : & S_1 = 175; & S_2 = 5775. \end{array}$$

On remarque que S_1 et S_2 ont la même terminaison ou chiffre final pour toutes les valeurs de n . Cela provient de ce que la cinquième puissance de tout nombre a la même terminaison que le nombre lui-même. Par exemple $2^5 = 32$; $3^5 = 243$; $7^5 = 16807$;

Et comme la différence $S_2 - S_1 = \frac{n^5-n}{3}$ et le diviseur 3 est premier avec 10, il en résulte que cette différence est un multiple de 10, et par conséquent S_1 et S_2 ont nécessairement la même terminaison.

Remarquons encore que les carrés de tous les nombres impairs sont toujours de la forme $(4h+1)$. Donc, si la somme S_2 est de la forme $(4h+1)$, les groupes de nombres doivent contenir 1, 5, 9, ... impairs et n'en peuvent pas contenir 3, 7, 11, ... Au contraire, si S_2 est de la forme $(4h+3)$ les groupes ne pourront contenir 1, 5, 9, ... impairs.

L'impossibilité des carrés magiques à deux degrés se voit immédiatement pour $n = 3$ et 4, car parmi les 8 groupes de trois nombres donnant $S_1 = 15$:

1, 5, 9; 1, 6, 8; 2, 4, 9; 2, 5, 8; 2, 6, 7; 3, 4, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6; aucun ne donne $S_2 = 95$, et pour $n = 4$; de 86 groupes donnant $S_1 = 34$, il n'y a que deux :

$$2, 8, 9, 15 \quad \text{et} \quad 3, 5, 12, 14$$

qui donnent $S_2 = 374$.

Pour $n = 5$, $S_2 = 1105$ étant de la forme $(4h+1)$, on ne peut disposer dans le carré les 13 impairs qu'en prenant deux rangées

de 5 impairs et trois de 1 impair et de 4 pairs. Or, parmi les 1394 groupes donnant $S_1 = 65$, pas un seul composé de 5 impairs ne donne $S_2 = 1105$.

Pour $n=6$, on trouve deux systèmes de répartition en 6 groupes égaux à deux degrés :

I.	II.
1, 8, 22, 24, 26, 30	1, 10, 18, 24, 26, 32
2, 12, 17, 18, 28, 24	2, 12, 14, 22, 28, 33
3, 9, 19, 20, 25, 35	3, 7, 20, 21, 29, 31
4, 5, 21, 23, 27, 31	4, 9, 15, 23, 25, 35
6, 10, 14, 16, 32, 33	5, 11, 13, 19, 27, 36
7, 11, 13, 15, 29, 36	6, 8, 16, 17, 30, 34

Mais ces deux systèmes ne se prêtent pas à la formation d'un carré magique, ce qui est d'ailleurs impossible, à cause de l'impossibilité de disposer dans le carré les 18 impairs de telle manière qu'il y ait trois rangées horizontales et verticales à 5 impairs et trois à 1 impair.

Enfin pour $n = 7$, $S_2 = 5775$ étant de la forme $(4h + 3)$, les 25 impairs doivent être distribués dans six rangées à 3 impairs et une rangée à 7 impairs. Or aucun des groupes de 7 impairs donnant $S_1 = 175$ ne donne $S_2 = 5775$.

10. Ainsi la construction des carrés magiques à deux degrés ne devient possible que pour $n = 8$ et au-dessus de 8.

Sans entrer ici dans les détails de la construction de ces carrés, nous nous bornerons à donner deux procédés de transformation des groupes de nombres qui permettront de déduire rapidement d'un seul groupe beaucoup d'autres égaux à deux degrés. On pourra ainsi dresser en peu de temps des Tables de tous les groupes de n nombres, si n n'est pas trop grand, qui serviront à la formation de tous les systèmes de répartition de n^2 nombres, ainsi qu'à la construction des figures numériques à deux degrés.

Le premier procédé consiste à prendre dans le groupe donné quatre nombres a, b, c, d , tous pairs ou impairs, ou deux pairs et deux impairs, tels que la différence de la somme des extrêmes $(a + d)$ et de celle des moyens $(b + c)$ soit un nombre pair $2r$. Si la première est plus grande, on diminue chacun des extrêmes

de r et l'on augmente de la même quantité chacun des moyens, et *vice versa*. Par exemple, en prenant quatre nombres

$$5, 12, 18, 31 \quad (S_1 = 66; S_2 = 1454),$$

on a

$$5 + 31 = 36; \quad 12 + 18 = 30; \quad 36 - 30 = 6; \quad \frac{6}{2} = 3.$$

Donc on peut remplacer ces nombres par

$$5 - 3; \quad 12 + 3; \quad 18 + 3; \quad 31 - 3$$

ou

$$2, 15, 21, 28 \quad (S_1 = 66; S_2 = 1454).$$

Soit donné le groupe

$$1, 6, 26, 35, 44, 48, 49, 51 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180).$$

Nous conviendrons d'écrire en chiffres gras dans les groupes les quatre nombres que nous nous proposerons de remplacer, et nous obtiendrons la série des groupes suivante :

$$1, 6, 26, 35, \mathbf{44, 48, 49, 51};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{35, 45, 47, 48, 52};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{38, 42, 45, 47, 55};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{39, 41, 44, 48, 55};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{38, 41, 45, 49, 54};$$

$$1, 6, 26, 37, 42, 45, 50, 53,$$

et ainsi de suite.

Voici une seconde série

$$14, 15, 16, 17, \mathbf{35, 45, 58, 60};$$

$$14, 15, \mathbf{16, 17, 39, 41, 54, 64};$$

$$14, 15, \mathbf{17, 21, 34, 36, 59, 64};$$

$$14, 15, 18, 20, 33, 37, 59, 64,$$

et ainsi de suite.

11. Dans le second procédé on prend trois nombres a, b, c tous de formes différentes, $3h; (3h+1); (3h+2)$, ou tous de l'une de ces formes. C'est avec des nombres pareils que sont composées les égalités $1, 5, 6 \perp 2, 3, 7; 1, 8, 9 \perp 3, 4, 11; 1, 11, 12 \perp 4, 5, 15, \dots$, dont les termes peuvent être augmentés respectivement des nombres additionnels $0, 1, 2$, comme c'est expliqué dans le premier Mémoire. La différence de la somme des

extrêmes $(a + c)$ et du double du moyen $2b$ sera nécessairement divisible par 3. Nommons-la $3t$.

Si $a + c > 2b$, on augmente le terme moyen b de $2t$ et l'on diminue a et c de t , et *vice versa*.

Par exemple, dans le dernier groupe

$$14, 15, 18, 20, 33, 37, 59, 64 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180),$$

on a trois nombres, 15, 18, 33, de la forme $3h$; deux nombres, 37 et 64, de la forme $(3h + 1)$, et trois, 14, 20, 59, de la forme $(3h + 2)$, Si nous prenons trois nombres, tous de formes différentes,

$$20, 33, 37 \quad (S_1 = 90; S_2 = 2858),$$

on a

$$20 + 37 = 57; \quad 2 \times 33 = 66; \quad 66 - 57 = 9; \quad \frac{9}{3} = 3; \quad 2 \times 3 = 6.$$

Comme $(a + c) < 2b$, on fait

$$20 + 3; \quad 33 - 6; \quad 37 + 3,$$

ce qui donne

$$23, 27, 40 \quad (S_1 = 90; S_2 = 2858),$$

et l'on aura un nouveau groupe

$$14, 15, 18, 23, 27, 40, 59, 64 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180).$$

Ces deux procédés, étant peu compliqués, suffiront pour dresser rapidement les Tables de tous les groupes égaux à deux degrés.

*Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe
des surfaces polyédrales; par M. S. MANGEOT.*

L'Académie des Sciences a mis au concours, il y a quelques années, l'étude des surfaces qui admettent les plans de symétrie des polyèdres réguliers.

L'extension que j'ai donnée à l'idée de symétrie ⁽¹⁾ m'a conduit à rechercher quelles sont les surfaces qui possèdent les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales.

Pour qu'un système de plans soit symétrique par rapport à une

⁽¹⁾ De la symétrie courbe, thèse de Doctorat. Imprimerie Gauthier-Villars et fils.

surface, il faut évidemment, et il suffit, que les plans qui le composent soient deux à deux symétriques l'un de l'autre par rapport à la surface. Si

$$y^2 = kx^2$$

est l'équation, en axes rectangles, de deux plans du système, une surface de symétrie quelconque de l'ensemble des deux plans vérifie la relation

$$kx \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y},$$

et, dès lors, est exprimée par une équation telle que

$$xy^k = F(z).$$

La condition pour que deux autres plans (P), (P₁) du système, représentés par les équations

$$P = ax + by + cz + d = 0, \quad P_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

soient symétriques l'un de l'autre par rapport à cette même surface a pour expression

$$[by^{k+1} + (cz + d)y^k + aF(z)][a_1y^{k+1} - c_1yF'(z) + kb_1F(z)] \\ + [b_1y^{k+1} + (c_1z + d_1)y^k + a_1F(z)][ay^{k+1} - cyF'(z) + kbF(z)] = 0,$$

et donne lieu aux relations

$$ab_1 + ba_1 = ac_1 + ca_1 = ad_1 + da_1 = 0, \\ bc_1 + cb_1 = bd_1 + db_1 = 0, \\ 2(aa_1 + kbb_1)F(z) = (2cc_1z + cd_1 + dc_1)F'(z),$$

qui déterminent les fonctions P, P₁, F(z). On trouve les deux solutions

$$P = ax + cZ, \quad P_1 = \frac{a_1}{a}(ax - cZ), \quad F(z) = hZ^{-\frac{a^2}{c^2}}$$

et

$$P = by + cZ, \quad P_1 = \frac{b_1}{b}(by - cZ), \quad F(z) = hZ^{-\frac{kb^2}{c^2}}$$

en posant $Z = z + \frac{d}{c}$ et désignant par h une constante arbitraire. Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de l'axe des z dont la cote est $-\frac{d}{c}$, on voit que l'équation de la surface est de la forme

$$xy^k z^{k'} = h,$$

k' étant une constante, et les deux plans (P) , (P_1) sont ceux qui correspondent à l'une ou l'autre des deux formules

$$x^2 = \frac{z^2}{k}, \quad \frac{y^2}{k} = \frac{z^2}{k'}.$$

L'interprétation de ces résultats conduit aux propositions suivantes :

1° Un système de plans ne peut offrir la symétrie par rapport à une surface courbe, indécomposable, que si les plans du système passent par un même point et sont au nombre de 2, 4 ou 6 : d'où il résulte que les surfaces polyédrales fermées ne peuvent avoir d'autres surfaces de symétrie que des plans ;

2° Quand un système de plans présente la symétrie relativement à une surface courbe, il admet une infinité d'autres surfaces de symétrie ;

3° Les seuls angles polyèdres convexes symétriques par rapport à des surfaces courbes sont les angles tétraèdres dont les quatre arêtes sont les diagonales d'un même parallélépipède rectangle ;

4° Les systèmes de six plans qui possèdent la symétrie courbe sont ceux formés par les six plans diagonaux des parallélépipèdes rectangles.

Les surfaces de symétrie des systèmes de six plans ne diffèrent pas de celles des systèmes de quatre plans. Celles-ci, rapportées aux trois plans de symétrie qu'admet nécessairement le système, ont pour équation

$$(1) \quad x^m y^n z^r = \text{const.},$$

les quatre plans du système étant définis par deux quelconques des relations

$$\frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}, \quad \frac{z^2}{r} = \frac{x^2}{m}, \quad \frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n}.$$

Je trouve ainsi que les surfaces Σ qui correspondent à la formule (1) sont toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales. Le problème que je me suis proposé sera donc résolu si, me donnant les valeurs de m , n , r , je puis déterminer les surfaces S qui sont symétriques par rapport à chacune des surfaces Σ .

Je considère, à cet effet, les courbes définies par les deux équations

tions

$$(2) \quad \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \lambda, \quad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \mu,$$

λ et μ étant deux paramètres. Chacune d'elles est symétrique par rapport à l'une quelconque des surfaces Σ comme étant l'intersection de deux cylindres hyperboliques qui ont tous deux cette symétrie, et il en sera évidemment de même de chacune des surfaces de la congruence que forment ces courbes, c'est-à-dire des surfaces représentées par l'équation

$$(3) \quad f\left(\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}, \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}\right) = 0,$$

où f est le symbole d'une fonction arbitraire. Ces surfaces font donc partie des surfaces S . J'ajoute que ce sont toutes les surfaces S . En effet, soit S' l'une quelconque de celles-ci. J'imagine une courbe C tracée à volonté sur S' , et un point $M(x', y', z')$ pris sur cette courbe. Le lieu des points symétriques du point M par rapport à toutes les surfaces Σ est une courbe C' , qui doit appartenir à la surface S' : or les équations de C' sont

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \frac{x'^2}{m} - \frac{y'^2}{n}, \quad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \frac{x'^2}{m} - \frac{z'^2}{r},$$

et leur forme fait voir que, si le point M décrit la courbe C , la surface engendrée par C' , c'est-à-dire la surface S' , devra avoir une équation telle que (3).

On peut écrire l'équation (3) sous cette forme, plus symétrique,

$$(4) \quad f\left(\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{r}, \frac{z^2}{r} - \frac{x^2}{m}, \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}\right) = 0.$$

On est parvenu, en définitive, au théorème suivant :

L'équation (4), dans laquelle f désigne une fonction arbitraire, est l'équation générale des surfaces S qui admettent toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales; et ces surfaces de symétrie sont données par la formule (1).

En particulier, les équations

$$\begin{aligned} f(x^2 + kz^2, y^2 + kz^2) &= 0 \quad (k < 0), \\ f(2x^2 - z^2, 2y^2 - z^2) &= 0, \\ f(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

définissent respectivement les surfaces qui ont la symétrie courbe de l'angle tétraèdre régulier, celle de l'angle polyèdre de l'octaèdre régulier, et celle de l'angle tétraèdre formé par les diagonales du cube; et les deux formules

$$f(x^2 + z^2, y^2 + z^2) = 0, \quad f(2x^2 + z^2, 2y^2 + z^2) = 0$$

déterminent, la première, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les paraboloïdes isoscèles ($xy = hz$) ayant le même sommet et les mêmes plans principaux; la seconde, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les cônes du second ordre ($xy = hz^2$), ayant les mêmes plans principaux avec une même section principale équilatère.

Je me propose de rechercher celles des surfaces S qui sont réglées et celles qui sont de révolution.

Si l'on assujettit la courbe (2), génératrice de toutes les surfaces S, à s'appuyer sur une droite donnée, on trouve une relation telle que

$$(5) \quad (a\lambda + b\mu + c)^2 + a'\lambda + b'\mu + c' = 0,$$

se réduisant à la forme

$$(6) \quad (a_1\lambda + b_1\mu + c_1)^2 + a'_1\lambda = 0,$$

lorsque la droite rencontre l'axe des z , et à celle-ci

$$(7) \quad (a_2\lambda + b_2\mu + c_2)^2 + b'_2\mu = 0,$$

quand la droite coupe l'axe des y . Cette relation représente la surface engendrée si l'on y suppose λ et μ remplacés par les valeurs $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}$, $\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}$. On en conclut que celles des surfaces S sur lesquelles on peut appliquer une droite qui ne soit pas parallèle à l'une des droites D définies par les formules

$$\frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}$$

sont des surfaces du second ou du quatrième ordre. Or considérons une surface S qui soit réglée : son équation aura nécessairement la forme (5). On reconnaît que, si elle n'est pas un des cylindres correspondant aux formules (2), celles de ses génératrices qui rencontrent l'axe des y ou l'axe des z ne sont parallèles à aucune des droites D. Il en résulte que son équation doit avoir à la

fois l'une et l'autre des formes (6) et (7), et comme ces formes ne peuvent être identiques qu'autant que a'_1 et b'_2 sont nuls, on voit que la surface considérée est, dans tous les cas, du deuxième degré.

D'un autre côté, en partant de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p \frac{m}{x} + q \frac{n}{y} = \frac{r}{z}$$

qui caractérise les surfaces S, et cherchant à y satisfaire en même temps qu'à l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, on trouve que celle-ci doit se réduire à la forme

$$qx - py = 0,$$

lorsqu'on suppose l'axe de révolution non parallèle au plan des xy . Or la solution commune à ces deux équations est, on s'en assure aisément,

$$z = \sqrt{\frac{r(x^2 + y^2)}{m + n}} + \text{const.}$$

On en conclut que les surfaces S qui sont de révolution doivent vérifier l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2 + z^2}{n + r} = \text{const.},$$

$$\frac{y^2}{n} - \frac{z^2 + x^2}{r + m} = \text{const.},$$

$$\frac{z^2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{m + n} = \text{const.}$$

Donc, les seules surfaces réglées, et les seules surfaces de révolution qui possèdent la symétrie courbe des surfaces polyédrales, sont des quadriques.

J'indiquerai encore un résultat concernant les plans de symétrie du cube.

Rapportées aux trois droites qui joignent les centres des faces opposées du cube, les surfaces S_1 qui ont les surfaces de symétrie du système des six plans diagonaux du cube sont définies par l'équation

$$f(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0,$$

et ces surfaces de symétrie par la formule

$$xyz = \text{const.}$$

définissent respectivement les surfaces qui ont la symétrie de l'angle tétraèdre régulier, celle de l'angle polyèdre de l' régulier, et celle de l'angle tétraèdre formé par les diagonales du cube; et les deux formules

$$f(x^2 + y^2, z^2) = 0, \quad f(2x^2 + y^2, 2y^2 + z^2) = 0$$

déterminent, la première, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les paraboloïdes isoscèles ($xy = hz$) ayant même sommet et les mêmes plans principaux; la seconde, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les paraboloïdes du second ordre ($xy = hz^2$), ayant les mêmes plans principaux et la même section principale équilatère.

Je me propose de rechercher celles des surfaces S qui sont de révolution.

Si l'on assujettit la courbe (2), génératrice de toutes les surfaces S , à s'appuyer sur une droite donnée, on trouve une telle que

$$(5) \quad (a\lambda + b\mu + c)^2 + a'\lambda + b'\mu + c' = 0,$$

se réduisant à la forme

$$(6) \quad (a_1\lambda + b_1\mu + c_1)^2 + a'_1\lambda = 0,$$

lorsque la droite rencontre l'axe des z , et à celle-ci

$$(7) \quad (a_2\lambda + b_2\mu + c_2)^2 + b'_2\mu = 0,$$

quand la droite coupe l'axe des y . Cette relation est la surface engendrée si l'on y suppose λ et μ remplacés par $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}$, $\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}$. On en conclut que celles des surfaces S pour lesquelles on peut appliquer une droite qui ne soit tangente à l'une des droites D définies par les formules

$$\frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}$$

*Sur des surfaces dont les lignes de courbure
s'obtiennent par quadrature; par M. TH. CARONNET.*

Considérons une surface quelconque (Σ) et soient α et β les paramètres des courbes de la surface qui ont pour représentation sphérique les génératrices rectilignes de la sphère.

On sait que dans ce système de coordonnées, imaginé par Ossian Bonnet, l'équation du plan tangent est (1)

$$(x + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et que l'équation des lignes de courbure revêt la forme très simple

$$(1) \quad r \, d\alpha^2 - t \, d\beta^2 = 0,$$

si l'on pose

$$r = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2}, \quad t = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2}.$$

La courbure totale du premier membre de (1) a pour expression

$$-\frac{1}{2\sqrt{rt}} \frac{D\left(\frac{1}{\sqrt{rt}}, s\right)}{D(\alpha, \beta)}.$$

Elle s'annule donc pour

$$(2) \quad rt = f(s).$$

Considérons maintenant une surface qui ait pour élément linéaire

$$ds^2 = r \, d\alpha^2 - t \, d\beta^2;$$

si nous supposons la relation (2) vérifiée, cette surface sera développable, et l'on obtiendra ses lignes de longueur nulle par quadratures.

Par conséquent, on obtient par de simples quadratures les lignes de courbure de toute surface (Σ) pour laquelle le ξ du plan tangent vérifie une équation telle que (2).

Pour obtenir de pareilles surfaces, représentons par

$$(3) \quad F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

(1) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Première Partie, p. 246.

une intégrale de l'équation

$$rt = f(s).$$

Si u, v, w, p sont les coordonnées tangentielles de (Σ) , on a

$$\begin{aligned}\frac{u}{p} &= \frac{\alpha + \beta}{\xi}, \\ \frac{v}{p} &= \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{\xi}, \\ \frac{w}{p} &= \frac{\alpha\beta - 1}{\xi}.\end{aligned}$$

Tirant de ces formules les expressions de ξ, α, β en fonction de u, v, w, p pour les porter dans l'équation (3), on obtiendra une relation

$$\Phi(u, v, w, p) = 0,$$

qui sera l'équation tangentielle d'une surface (Σ) dont les lignes de courbure s'obtiendront par quadrature.

On pourra faire l'application de cette remarque aux équations

$$\begin{aligned}rt - s^2 &= 0, \\ rt - s^2 + a^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dans le premier cas, l'équation

$$F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

représente une développable quelconque.

Quant à l'équation

$$rt - s^2 + a^2 = 0,$$

on trouvera son intégration dans l'Ouvrage déjà cité de M. Darboux (Liv. VII, Chap. V).

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. BLUTEL.

THÉORÈME I. — *Toute fonction entière $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ des racines d'une équation*

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0,$$

à coefficients quelconques, peut se mettre sous forme d'une fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation.

et par rapport à $m - 1$ racines $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, cette nouvelle fonction étant de degré p par rapport à x_{m-p} . Cette transformation n'est possible que d'une seule façon.

Démontrons d'abord la première partie du théorème pour une fonction entière $f(x_1, x_2)$ des racines d'une équation du second degré

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation $x_1 + x_2 + p_1 = 0$, on obtient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -p_1 - x_1).$$

Cette dernière fonction, où l'on remplacerait x_1^2 autant de fois que possible par $-(p_1 x_1 + p_2)$, prendrait finalement la forme $a + x_1 b$, où a et b sont des fonctions entières de p_1 et p_2 .

Supposons donc la propriété démontrée pour une équation de degré $m - 1$ et cherchons à l'étendre à une équation de degré m . Soit une fonction entière $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ des racines d'une équation entière

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0.$$

On peut la regarder simplement comme une fonction entière de $x_2, x_3, \dots, x_m$ qui sont les racines de l'équation

$$x^{m-1} + (x_1 + p_1)x^{m-2} + (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2)x^{m-3} + \dots + x_1^{m-1} + p_1 x_1^{m-2} + \dots + p_{m-1} = 0.$$

Comme telle, elle se mettra sous forme d'une fonction entière des coefficients de cette équation et, par suite, de $x_1, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$, fonction entière aussi par rapport à $x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$ et de degré $m - 2$ par rapport à x_2 , de degré $m - 3$ par rapport à x_3 , etc.

Soit

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$$

cette nouvelle fonction; en tenant compte de la relation

$$x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + \dots + p_m = 0,$$

on la ramènera à ne contenir x_1 qu'au degré $m - 1$, et l'on aura alors la forme énoncée. Nous verrons plus loin que cette forme ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il résulte immédiatement de là que toute fonction rationnelle

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

où les fonctions f_1 et F_1 possèdent les propriétés énoncées dans le théorème précédent.

THÉORÈME II. — *Si la fonction rationnelle*

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

est une fonction symétrique, les deux polynômes f_1 et F_1 de la remarque précédente regardés comme fonctions entières de $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $p_1, p_2, \dots, p_m$, ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.

Dans le cas de deux racines, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{a(p_1, p_2) + x_1 b(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2) + x_1 B(p_1, p_2)}.$$

Cette fonction rationnelle du premier degré par rapport à x_1 , conserve la même valeur si l'on remplace x_1 par x_2 , à cause de la symétrie de R ; cet échange n'altère d'ailleurs pas les valeurs de p_1 et p_2 ni, par suite, les coefficients a, b, A, B .

On en conclut qu'elle est indépendante de x_1 et, par suite, que

$$\frac{a(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2)} = \frac{b(p_1, p_2)}{B(p_1, p_2)} = R.$$

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})} \\ &= \frac{a(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1} b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{A(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1} B(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}, \end{aligned}$$

α, b, A, B étant aussi des fonctions entières de $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Puisque R est une fonction symétrique, elle ne change pas si l'on y remplace x_{m-1} par x_m , échange qui ne modifie pas $p_1, p_2, \dots, p_m$ ni, par suite, les fonctions α, b, A, B . On en conclut, comme plus haut, que l'on a

$$R = \frac{\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{A(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})} = \frac{b(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{B(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}.$$

Chacun de ces nouveaux rapports est de la forme

$$\frac{u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1}v(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1}^2w(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{U(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1}V(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) + x_{m-1}^2W(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}.$$

Leur valeur ne change pas, si l'on y remplace x_{m-2} successivement par x_{m-1} et par x_m , à cause de la symétrie de R ; comme ils sont du second degré seulement par rapport à x_{m-2} , on en conclut qu'ils n'en dépendent pas, c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{u}{U} = \frac{v}{V} = \frac{w}{W}$$

et trois autres égalités semblables.

La même démonstration peut évidemment se répéter de proche en proche, et l'on aura finalement pour R une suite de rapports dont les termes ne dépendent plus, en dehors de $p_1, p_2, \dots, p_m$, que de la seule racine x_1 , qu'ils renferment au degré $m - 1$; comme ils conservent la même valeur lorsqu'on y remplace x_1 successivement par les $m - 1$ autres racines, on conclut qu'ils ne renferment pas x_1 , ce qui démontre le théorème.

CONSEQUENCES. — 1° Toute fonction rationnelle symétrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega(p_1, p_2, \dots, p_m)}{\Omega(p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

ω et Ω désignant deux polynômes; elle peut donc être regardée comme un quotient de deux polynômes symétriques par rapport aux racines $x_1, x_2, \dots, x_m$.

2° On peut remarquer aussi que si une fonction entière

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

est symétrique et si on la met sous la *forme réduite* indiquée dans le théorème I, elle se réduira à son terme indépendant de $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. En effet, on peut la regarder comme une fonction rationnelle symétrique dont le dénominateur est 1; appliquant le théorème II, on voit que les coefficients des divers termes renfermant $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ au numérateur de la forme réduite sont tous nuls.

On déduit de là un perfectionnement important à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.

On commencera par faire disparaître dans la fonction symétrique une racine quelconque x_m par exemple, puis on ramènera la fonction à ne plus contenir une autre racine x_{m-1} qu'au premier degré; ce résultat obtenu, on négligera tous les termes renfermant x_{m-1} . On ramènera la fonction restante à ne plus contenir une nouvelle racine x_{m-2} qu'au second degré, puis on négligera tous les termes renfermant encore x_{m-2} , etc.

3° La réduction d'une fonction entière quelconque

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

n'est possible que d'une seule façon.

Si l'on avait en effet de deux façons différentes

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m).$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m).$$

on aurait

$$R = 1 = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}.$$

L'application du théorème II à cette fonction symétrique montre qu'il y a bien égalité entre les coefficients des deux fonctions f_1 et f'_1 regardées comme polynômes par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$.

Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions; par M. SCHLEGEL.

1. Pour fixer la notion d'un *cube magique à n dimensions* il faut d'abord se rappeler que le segment de droite, le carré et le cube peuvent être regardés comme les premiers termes d'une série de figures que l'on peut poursuivre dans l'espace à n dimensions (¹).

Le terme général de cette série, c'est-à-dire une figure régulière à n dimensions et à 2^n sommets est ce que nous appelons le *cube à n dimensions*.

Représentons-nous un système formé de $r - 1$ espaces à $n - 1$ dimensions, équidistants et parallèles entre eux. Alors un cube à n dimensions peut être décomposé, au moyen de n systèmes pareils, normaux l'un à l'autre, en r^n cubes congrus (cellules).

Ainsi l'on trouve, pour $n = 2$ et $r = 5$, que le carré est décomposé en 25 carrés par 2 systèmes de 4 droites; ou, en posant $n = 3$, $r = 5$, le cube décomposé en 125 cubes par 3 systèmes de 4 plans. Remarquons aussi que la figure peut être regardée, de n manières différentes, comme agrégat de r^{n-1} séries linéaires de r cellules.

Imaginons encore qu'on ait distribué, aux r^n cellules, les nombres entiers de 1 à r^n , de sorte que toute série linéaire de nombres, dans toutes les n directions, donne la même somme s ; alors cet agrégat de nombres est ce que nous appelons un *cube magique à n dimensions et de l'ordre r* .

On aura

$$(1) \quad s = \frac{(1 + r^n)r^n}{2} : r^{n-1} = \frac{(1 + r^n)r}{2}.$$

Si, en outre, chacune des 2^{n-1} séries diagonales donne la somme s , nous dirons que le cube magique est *parfait*.

Avant de traiter le problème mentionné dans le titre de ce Mémoire, nous donnons préalablement quelques autres remarques sur les cubes magiques.

Si r est un nombre impair, on peut augmenter la perfection du cube magique, en ajoutant la condition que les séries joignant

(¹) Voir par exemple mon Mémoire : *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (Bull. Soc. math. de France, t. X, p. 172).

les milieux de deux figures limitantes opposées (arêtes, faces, solides, etc.) donnent la même somme s . Or le nombre des figures à p dimensions limitant un cube à n dimensions est

$$(2) \quad 2^{(n-p)} n \cdot p,$$

où

$$(3) \quad n \cdot p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}.$$

Donc le nombre des séries joignant les milieux de deux figures opposées est

$$(4) \quad 2^{n-p-1} n \cdot p.$$

Et comme il y a $n-1$ espèces de figures limitantes, diverses par le nombre de leurs dimensions, il faudra prendre dans l'expression (4) pour p toutes les valeurs de 1 à $n-1$, pour obtenir le nombre entier des conditions particulières comprises en la condition susdite. (En posant $p=0$ on retrouverait le nombre des séries diagonales.) Ainsi, en posant pour le cube ordinaire $n=3$, on trouve que le nombre des séries joignant les milieux des arêtes ($p=1$) est 6, et que le même nombre relatif aux faces ($p=2$) est 3.

Mais l'ensemble de ces conditions (que nous appelons *conditions primaires*) ne suffit pas encore pour restreindre le nombre des cubes magiques, qui les remplissent, à un seul. Donc on peut encore ajouter des conditions que nous appelons *secondaires*. Ainsi, pour $n=2$, on peut ajouter la condition connue que l'on passe d'un nombre au suivant par le saut du cavalier.

Enfin remarquons que tout nombre compris dans un cube magique à n dimensions est situé également dans n séries linéaires, $n \cdot 2$ carrés, $n \cdot 3$ cubes ordinaires, enfin en $n \cdot s$ cubes à s dimensions.

2. Pour représenter dans le plan le cube magique à n dimensions, nous remplaçons chacune des r^n cellules à n dimensions, faisant partie du cube, par un petit carré (*élément*) qui renferme le nombre appartenant à la cellule. Alors on obtient sans difficulté les représentations suivantes (pour $r=3$) :

1° Le cube à 0 dimensions est l'élément lui-même, représenté par un simple carré (fig. 1).

2° Le cube à 1 dimension fait partie de la série des nombres entiers commençant par 1 et est représenté par une bande composée de r carrés (fig. 2).

3° Le cube à 2 dimensions (le carré proprement dit) est représenté par r bandes de l'espèce précédente (fig. 3).

4° Le cube à 3 dimensions (le cube ordinaire). — Pour le représenter dans le plan nous l'imaginons décomposé en r carrés de l'espèce précédente. Ces carrés, placés l'un après l'autre, forment une bande qui est l'exacte image du cube (fig. 4).

5° Tout de même le cube à 4 dimensions est décomposé en r cubes à 3 dimensions. Donc il est représenté par un carré composé de r bandes de l'espèce précédente.

Fig. 1. Fig. 2.

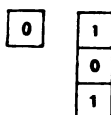


Fig. 3.

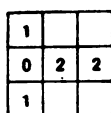


Fig. 4.

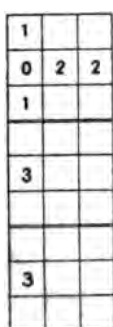
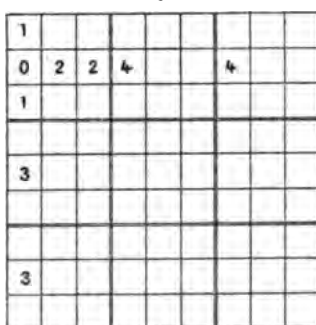


Fig. 5.



On voit bien que cette méthode de représentation est susceptible d'être généralisée à volonté. Donc un cube magique à n dimensions est représenté par une bande, si n est impair, et par un carré, si n est pair. Alors la bande est composée de r carrés, et le carré de r bandes, et chacune de ces figures représente un cube à $(n - 1)$ dimensions, et ainsi de suite.

Il ne faut pas oublier que la décomposition d'un cube à n dimensions en cubes à $(n - 1)$ dimensions, impossible à l'égard de Géométrie, ne regarde ici qu'un ensemble de nombres, arrangé en forme de cube, arrangement qui donne bien lieu à la décomposition mentionnée. Aussi il importe peu d'imaginer que les nombres du cube magique à n dimensions soient renfermés en carrés plans au lieu de cellules à n dimensions.

Quant à l'image plane, chacun des petits carrés est situé dans n séries (ou bandes) rectilignes. Mais, tandis que dans le cube ces séries sont perpendiculaires l'une à l'autre, il faut les chercher dans l'image plane à l'aide des figures que nous venons de décrire. Ainsi on trouve que les groupes $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 2)$,

(0, 3, 3), (0, 4, 4) forment des séries rectilignes de petits carrés. On voit cela immédiatement dans les *fig.* 2 et 3. Quant aux *fig.* 4 et 5, il faut imaginer une superposition de carrés plus grands qui sont composés de 9 cellules et séparés l'un de l'autre par une double ligne. Alors on voit que les cellules (0, 3, 3) ou (0, 4, 4) sont de même superposées l'une à l'autre et forment une série rectiligne. On peut choisir à volonté une autre cellule que (0) et l'on trouvera aisément les séries qui la renferment. On voit aussi que généralement l'image plane d'un cube à $n + 1$ dimensions, en comparaison de celui à n dimensions, contient une direction de plus, de sorte que cette image suffit complètement pour manifester l'égalité des sommes formées par les nombres de chaque série du cube magique. De même on ne rencontrera pas de difficultés à suivre les directions diagonales ou les autres directions qu'il faut prendre en considération dans le cube magique parfait de l'ordre impair.

Enfin il faut remarquer les deux théorèmes évidents :

1° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , formée par un carré, représente également un cube magique à $2s$ dimensions et de l'ordre $r^{\frac{n}{2}+1-s}$, où $2s < n$.*

2° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , formée par une bande, représente également un cube magique à $(2s + 1)$ dimensions et de l'ordre $r^{\frac{n+1}{2}-s}$, où $2s + 1 < n$.*

3. *Exemple.* — La méthode qui nous a servi à calculer l'exemple suivant (1) sera publié dans un Mémoire qui suivra. Elle est différente des méthodes employées par d'autres géomètres (Sauveur, Hugel, Scheffler) pour obtenir des cubes magiques à trois dimensions. Elle donne généralement la solution de ce problème : *Étant donné un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , trouver à son aide un cube magique à $n + 1$ dimensions et de l'ordre r .*

(1) Une série d'autres exemples, embrassant les cas : $n = 3$ et $r = 3$ à 9, $n = 4$ et $r = 4$ à 6, $n = 5$ et $r = 3$, est représentée par des Tableaux trop étendus pour être publiés ici.

Dans la résolution de ce problème il faut distinguer les cas :
 $r = 2\lambda + 1$, $r = 4\lambda + 2$, $r = 4\lambda$.

L'exemple suivant offre un cube magique parfait à quatre dimensions de l'ordre 3.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
52 14 57	6 73 44	65 36 22
56 54 13	43 5 75	24 64 35
61 50 12	42 1 80	20 72 31
11 63 49	79 41 3	33 19 71
51 10 62	2 81 40	70 32 21
47 18 58	7 77 39	69 28 26
60 46 17	38 9 76	25 68 30
16 59 48	78 37 8	29 27 67

Cette figure représente encore, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, un carré magique de l'ordre 9.

Au lieu du Tableau précédent on peut aussi faire usage, pour le même cube magique, de trois autres représentations en double projection, que l'on trouve dans mon Mémoire : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. V, p. 1-7, fig. 2_a, 2_b et 3). En effet, on parvient aisément à placer les nombres sur sommets et aux milieux des arêtes, et, si l'on veut, aux milieux des faces.

Explications. — Voici d'abord les huit cubes magiques ordinaires limitant le cube à 4 dimensions :

1.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
52 14 57	6 73 44	65 36 22
56 54 13	43 5 75	24 64 35

8.

47 18 58	7 77 39	69 28 26
60 46 17	38 9 76	25 68 30
16 59 48	78 37 8	29 27 67

2.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
61 50 12	42 1 80	20 72 31
47 18 58	7 77 39	69 28 26

7.

56 54 13	43 5 75	24 64 35
51 10 62	2 81 40	70 32 21
16 59 48	78 37 8	29 27 67

3.

15 55 53
52 14 57
56 54 13
61 50 12
11 63 49
51 10 62
47 18 58
60 46 17
16 59 48

6.

34 23 66
65 36 22
24 64 35
20 72 31
33 19 71
70 32 21
69 28 26
25 68 30
29 27 67

4.

15 74 34
52 6 65
56 43 24
61 42 20
11 79 33
51 2 70
47 7 69
60 38 25
16 78 29

5.

53 4 66
57 44 22
13 75 35
12 80 31
49 3 71
62 40 21
58 39 26
17 76 30
48 8 67

Les cubes (1.8), (2.7), (3.6), (4.5) sont opposés l'un à l'autre.

Les huit *axes diagonaux* sont :

| 15.41.67 |, | 53.41.29 |, | 13.41.69 |, | 56.41.26 |,
| 34.41.48 |, | 66.41.16 |, | 35.41.47 |, | 24.41.58 |.

Les seize *lignes joignant les milieux des arêtes opposées* sont :

| 55.41.27 |, | 57.41.25 |, | 54.41.28 |, | 52.41.30 |,
| 23.41.59 |, | 22.41.60 |, | 64.41.18 |, | 65.41.17 |,
| 74.41. 8 |, | 4.41.78 |, | 75.41. 7 |, | 43.41.39 |,
| 61.41.21 |, | 12.41.70 |, | 62.41.20 |, | 51.41.31 |.

Les douze *lignes joignant les centres des faces opposées* sont :

| 14.41.68 |, | 36.41.46 |, | 42.41.40 |, | 80.41. 2 |,
| 45.41.37 |, | 44.41.38 |, | 5.41.77 |, | 6.41.76 |,
| 50.41.32 |, | 49.41.33 |, | 10.41.72 |, | 11.41.71 |.

Les quatre *lignes joignant les centres des cubes opposés* sont :

| 73.41. 9 |, | 63.41.19 |, | 1.41.81 |, | 79.41. 3 |.

Toutes les sommes le long des quatre directions principales des huit axes diagonaux et des lignes joignant les milieux des arêtes, faces et cubes opposés, font 123.

Outre cela, chacun des huit cubes limitants a un axe diagonal qui donne la même somme. Ces axes, avec les numéros donnés à ces cubes ci-dessus, sont :

(1) | 15.73.35 |, (2) | 53. 1.69 |, (3) | 13.63.47 |, (4) | 15.79.29 |,
(5) | 53. 3.67 |, (6) | 35.19.69 |, (7) | 13.81.29 |, (8) | 47. 9.67 |,

Ces axes forment ensemble une ligne continue et rentrant en elle-même.

Tout nombre est situé simultanément dans quatre séries linéaires (suivant les directions principales). Par exemple, ces séries sont, pour le nombre 54,

| 55.14.54 |, | 56.54.13 |, | 54. 5.64 |, | 54.10.59 |.

Puis tout nombre est situé dans six carrés, par exemple le nombre 54 dans les suivants :

15 55 53 52 14 57 56 54 13	56 54 13 51 10 62 16 59 48	55 50 18 14 63 46 54 10 59
55 45 23 14 73 36 54 5 64	56 54 13 43 5 75 24 64 35	54 5 64 10 81 32 59 37 27

Enfin, tout nombre est situé dans trois cubes à trois dimensions.

Une lettre d'Abel Transon.

La lettre qu'on va lire a été communiquée, à la Société, par M. C.-A. Laisant, qui s'est exprimé ainsi :

En feuilletant de vieilles notes, ces jours derniers, je viens de retrouver une lettre d'Abel Transon, lettre que j'eus l'honneur de recevoir de lui à l'époque où il publiait, dans les *Nouvelles Annales*, ses articles si remarquables sur le *Calcul directif*, c'est-à-dire en 1868.

Cette lettre est, en quelque sorte, un complément et un commentaire de la série des articles dont il s'agit; à ce titre, elle peut présenter un réel intérêt, au point de vue de l'histoire et de la doctrine des imaginaires. C'est ce qui m'a déterminé à la reproduire et à la communiquer à la Société mathématique de France.

On y retrouvera les qualités de clarté et de netteté philosophique qui caractérisaient ce grand esprit.

« Paris, 29 juin 1868.

» Vous avez bien raison de voir une analogie étroite entre les *Clefs* de M. Cauchy et les *Nombres directifs* d'Argand-Français-Mourey. Toutefois, le nombre directif correspond essentiellement à une *ligne unique* dont la longueur est mesurée par le *module* et la direction par l'*argument*. Ce nombre peut être remplacé par la ligne brisée à termes trigonométriques ou par toute autre ligne brisée terminée aux mêmes extrémités. Mais il y a un grand avantage à avoir *impliqué* dans une seule lettre la grandeur et la direction, au lieu de les expliciter en deux termes distincts. C'est un point tout à fait capital qui caractérise la doctrine de l'Algèbre directive; et, à vrai dire, je ne suis pas bien certain que M. Cauchy ait accepté aussi nettement que le supposent MM. Briot et Bouquet cette représentation du nombre imaginaire par un chemin oblique.

» Vous verrez, dans les articles que j'ai publiés, de nombreux exemples qui établissent l'avantage de cette conception. En voici un que je regrette d'avoir omis, car il est aussi simple que décisif.

» Si l'on fait le produit directif de plusieurs unités dirigées respectivement sous les inclinaisons $a, b, c, \dots$ et représentées par $1_a, 1_b, 1_c, \dots$, on a, d'après la règle de la multiplication, la valeur du produit donnée par

$$1_a 1_b 1_c \dots = 1_{a+b+c+\dots}$$

Or, en remplaçant maintenant chaque unité inclinée par une ligne

brisée en cosinus et sinus, on a immédiatement le théorème de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \dots = \cos(a + b + \dots) + i \sin(a + b + \dots).$$

» Ensuite, il est bien vrai aussi qu'en considérant essentiellement le nombre dit *imaginaire*, sous sa forme usuelle $a + b\sqrt{-1}$; considérant, en outre, a et b comme une ordonnée et une abscisse, et, par suite, ce nombre comme déterminant, à la façon de Descartes, un point quelconque du plan; il est bien vrai, dis-je, qu'on est naturellement conduit à se demander si l'addition d'un nouveau terme affecté d'un nouveau coefficient de perpendicularité ne conduira pas à un point hors du plan, à un point quelconque de l'espace. Cette extension, que vous avez bien aperçue, est, comme vous le savez aussi, le principe de la théorie des quaternions de M. Hamilton. Sans avoir imaginé cette théorie, les inventeurs du calcul directif, Argand, Français et Mourey, eux aussi, ont entrevu une extension de la doctrine à une certaine Géométrie de l'espace.

» Pour moi, j'ai voulu, dans l'exposition du calcul directif, écarter complètement ce point de vue. J'ai voulu montrer que le *chemin incliné sur le plan* réalise le symbole imaginaire de l'Algèbre; et qu'ainsi tous les nombres requis par les nécessités du calcul, le nombre fractionnaire, le nombre positif et le nombre négatif, et enfin le nombre dit *imaginaire* sont procurés à l'Algèbre par la Géométrie, avec le même caractère de nécessité!... Résultat très important à nos yeux, parce qu'il en doit suivre une réforme dans l'enseignement de l'Algèbre. Et à ceux qui m'ont souvent objecté : mais pourquoi ne sortez-vous pas du plan? je répondais : ce n'est pas la Géométrie à trois dimensions qui est en souffrance, qui a des symboles imaginaires, inexpliqués; c'est l'Algèbre. Donc, quand la Géométrie vient au secours de l'Algèbre pour combler une lacune, l'Algèbre serait mal venue de répondre à la Géométrie : Construisez *d'abord* des symboles applicables à l'espace; c'est alors seulement que j'examinerai si, comme vous le dites, il y a vraiment des nombres dont le carré soit négatif, ce que j'ai toujours nié jusqu'ici. . . .

» En d'autres termes, le nouveau symbole de perpendicularité nécessaire pour sortir du plan me paraît une invention, nullement

dénuée d'utilité et d'opportunité sans doute ; mais aussi, inévitablement marquée de quelque arbitraire. Or, je tenais précisément à établir que la correspondance du chemin incliné de la Géométrie avec le symbole imaginaire des algébristes est aussi naturelle que la correspondance de la divisibilité indéfinie des grandeurs linéaires avec la génération du nombre fractionnaire ; ou aussi naturelle que la correspondance des deux chemins opposés de la Géométrie cartésienne avec les nombres dits *positifs* et *négatifs* de l'Algèbre.

» Pour m'éclairer complètement à ce sujet, pendant que je composais la série des articles des *Nouvelles Annales*, je m'en suis procuré une Thèse de M. Allégret sur les quaternions. Sans m'être assimilé la théorie, qui n'est peut-être pas exposée dans cette thèse d'une façon bien lucide, j'en ai vu assez pour, d'une part, me confirmer dans l'opinion ci-dessus, et me décider à ne faire aucune mention des quaternions à l'occasion de *la vraie théorie des quantités dites imaginaires*. Mais j'ai vu, en même temps, que cette théorie des quaternions avait déjà donné des résultats intéressants et, tout au moins, des expressions nouvelles de propriétés déjà connues de la Géométrie des lignes et des surfaces.

» Ainsi, bien loin de vous détourner de cette étude, je ne crains pas d'exprimer la conviction que cette théorie pourra donner des résultats vraiment nouveaux. N'est-il pas évident que, si l'on peut impliquer dans une seule lettre la grandeur et la direction d'un chemin oblique de l'espace, c'est-à-dire représenter par une seule lettre la fonction dite *quaternion*, sauf à procéder tout le calcul qui dérive de cette théorie, une équation entre deux variables suffira pour exprimer dans l'espace des lois de transformation des figures?...

» ABEL TRANSON. »

Sur les involutions d'espèce quelconque ;
par M. MAX GENTY.

1. M. Guccia définit, dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, les involutions de degré n et d'espèce k . Une pareille involution, qu'il désigne par le symbole I_n^k , est une série linéaire k fois indéterminée de groupes de n points pris sur une droite ou

sur une courbe unicursale donnée; c'est-à-dire, telle que k points arbitraires de la droite ou de la courbe déterminent un groupe unique de n points appartenant à l'involution.

Analytiquement, une équation de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_{k+1} U_{k+1} = 0,$$

dans laquelle les λ_i sont des paramètres arbitraires, et les U_i des polynômes de degré n par rapport à la variable t , au moyen de laquelle peuvent s'exprimer rationnellement les coordonnées de la courbe unicursale donnée, représente une involution de degré n et d'espèce k . Cette définition de l'involution I_n^k n'est autre que la traduction analytique de la définition géométrique donnée primitivement.

2. De la définition précédente, nous déduisons immédiatement qu'il existe une infinité de groupes d'une involution I_n^k possédant en un point donné un point multiple d'ordre $k' < k$. De plus, tous ces groupes appartiennent évidemment à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$ qui est dite *adjointe* au point multiple donné.

En particulier, un point donné considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k . Nous voyons, d'après cela, qu'il doit exister un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant un point multiple d'ordre $k + 1$. Nous allons rechercher ce nombre, que nous désignerons par u_n^k .

3. Nous emploierons dans ce but une démonstration plus courte que celle de M. Guccia. Le seul lemme analytique auquel nous aurons recours, et qui nous servira pour toutes les démonstrations qui suivent, est le principe de correspondance de Chasles que nous énonçons une fois pour toutes :

Si deux séries de points X et Y se correspondent algébriquement, de telle sorte qu'à un point X correspondent β points Y et à un point Y, α points X, le nombre des coïncidences des points X et Y sera $\alpha + \beta$.

Soit A un point donné de la courbe unicursale. Ce point considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k , et, par conséquent, $n - k$ points M différents de A et appartenant à ce groupe. Il s'agit de déterminer, quand A parcourt la courbe donnée, le nombre des coïncidences du point A

avec un des points M. Un des points M étant donné, les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} possédant u_{n-1}^{k-1} points multiples d'ordre k . Les points A et M se correspondent donc algébriquement entre eux, de telle façon qu'à un point A correspondent $n - k$ points M, et à un point M, u_{n-1}^{k-1} points A.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M est $u_{n-1}^{k-1} + n - k$.

Nous avons donc l'équation de récurrence

$$u_n^k = u_{n-1}^{k-1} + n - k$$

qui, au moyen de l'équation initiale évidente

$$u_{n-k}^0 = n - k,$$

nous donne

$$u_n^k = (k+1)(n-k).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉOREME I. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe $(k+1)(n-k)$ groupes possédant un point multiple d'ordre $k+1$.*

4. Nous allons maintenant démontrer que, si $n \geq 2k$, il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant k points doubles et nous allons rechercher ce nombre que nous désignerons par v_n^k . Soit A un point donné; les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} . Il existe v_{n-1}^{k-1} groupes de cette dernière involution possédant $k-1$ points doubles. En dehors de ces points doubles et du point A, tous ces groupes déterminent $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points M correspondants à A, et il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M. Or, rien ne différenciant le point A des points M, à un point M correspondent également $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points A. Donc le nombre des coïncidences est

$$2v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1).$$

Chacune de ces coïncidences fournit un groupe de l'involution I_n^k possédant k points doubles.

Mais on voit facilement que nous obtiendrons k fois le même groupe en faisant coïncider successivement le point A avec chacun

des k points doubles. Nous avons donc, en définitive, l'équation de récurrence suivante

$$v_n^k = \frac{2}{k} v_{n-1}^{k-1} (n - 2k + 1),$$

qui, avec l'équation initiale

$$v_{n-k+1}^1 = 2(n - k),$$

donne

$$v_n^k = \frac{2^k (n - k)!}{k! (n - 2k)!}.$$

Nous avons donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Dans toute involution de degré n et d'espèce k , si $n \geq 2k$, il existe $\frac{2^k (n - k)!}{k! (n - 2k)!}$ groupes de cette involution possédant k points doubles.*

Ce théorème a été démontré par M. Émil Weyr, et M. Guccia l'énonce sans en donner de démonstration.

5. Nous allons continuer dans le même ordre d'idées et démontrer qu'il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$, k' étant un nombre quelconque plus petit que k .

Appelons X_1 le nombre cherché; les groupes de I_n^k ayant en un point donné A un point multiple d'ordre h' appartiennent à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$. Il existe $(k - k' + 1)(n - k)$ groupes de cette involution possédant un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. En dehors de ces points multiples et du point A, tous ces groupes déterminent donc $(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$ points M qui correspondent au point A. Il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec les points M. Or le point M étant donné, les groupes de I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} , et il existe un nombre X_2 de groupes de cette involution possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à k' et $k - k' + 1$.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, nous avons

$$X_1 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_2.$$

Nous obtiendrons, par des raisonnements analogues,

$$X_2 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_3,$$

X_3 étant le nombre des groupes d'une involution I_{n-2}^{k-2} possédant

deux points multiples d'ordres $k' - 1$ et $k - k' + 1$. Nous arrivons successivement ainsi à l'équation finale

$$X_{k'+1} = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1),$$

car $X_{k'+1}$ n'est autre que le nombre des combinaisons des groupes d'une involution possédant un point simple et un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. Nous déduirons donc, par addition des équations précédentes,

$$X_1 = (k' + 1)(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1).$$

Nous avons, par suite, cette proposition :

THÉORÈME III. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe $(k' + 1)(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$ groupes possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$.*

6. Si nous appliquons le théorème I à l'involution particulière I_n^{n-1} , nous en déduisons qu'une pareille involution a n points multiples d'ordre n . Représentons par $t_1, t_2, \dots, t_n$ les n valeurs du paramètre t qui correspondent aux n points de l'involution I_n^{n-1} , et désignons, pour abréger, par $[t]^n, [t]^{n-1}, [t]^{n-2}, \dots$ la somme des produits n à $n, n - 1$ à $n - 1, n - 2$ à $n - 2, \dots$ de ces n quantités t_i . On voit facilement que l'involution I_n^{n-1} pourra être représentée par une équation de la forme

$$(1) \quad A_0[t]^n + A_1[t]^{n-1} + \dots + A_{n-1}[t]^1 + A_n = 0.$$

Les valeurs de t qui correspondent aux n points multiples s'obtiendront en faisant, dans l'équation (1),

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = z.$$

Ces n valeurs de t sont donc les racines de l'équation

$$(2) \quad A_0 z^n + C_n^1 A_1 z^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} A_{n-1} z + A_n = 0,$$

C_n^i représentant le nombre des combinaisons de n objets i à i . Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation (2); en prenant pour les quantités z_i les mêmes notations que pour les quantités t_i , nous tirons de l'équation précédente

$$\begin{aligned} A_0[z]^1 &= -C_n^1 A_1, \\ A_0[z]^2 &= C_n^2 A_2, \\ &\dots\dots\dots \\ A_0[z]^{n-1} &= (-1)^{n-1} C_n^{n-1} A_{n-1}, \\ A_0[z]^n &= (-1)^n A_n. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans le premier membre de l'équation (1), les quantités $[z]^i$ par les $[z]^i$ correspondants; nous obtenons, au facteur A_0 près,

$$A_0[(-1)^n A_0 A_n + (-1)^{n-1} C_n^1 A_1 A_{n-1} + \dots - C_n^1 A_1 A_{n-1} + A_0 A_n].$$

Cette expression s'annule identiquement dans le cas où n est impair; nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Toute involution d'ordre n et d'espèce $n - 1$ présente n points multiples d'ordre n . Dans le cas où n est impair, ces points multiples appartiennent à un même groupe de l'involution.*

M. Appell a démontré ce théorème dans le cas de $n = 3$ et il l'a appliqué fort élégamment à la recherche des propriétés polaires des cubiques gauches. On conçoit que le théorème IV puisse conduire à un grand nombre de propriétés géométriques.

Prenons, par exemple, une conique Γ et un point A de cette courbe. Tous les cercles passant par ce point ont, en commun avec Γ , trois points M , autres que A , formant évidemment une involution I_3^2 . Appliquons à cette involution le théorème IV; nous en déduisons la propriété suivante qui est bien connue :

Par un point A d'une conique Γ , on peut mener à cette courbe trois cercles osculateurs dont les points de contact M_1, M_2, M_3 sont différents de A . Ces trois points sont situés avec le point A sur un même cercle.

7. Les théorèmes que nous venons de démontrer dans les paragraphes précédents permettent de déterminer immédiatement le nombre des surfaces algébriques de degré donné soumises à des conditions déterminées et ayant, avec une courbe gauche unicursale donnée, un contact d'ordre supérieur.

Soit une courbe gauche unicursale de C_n de degré n . Le théorème I nous donne les nombres suivants :

Nombre de plans tangents menés à C_n par une droite donnée D :

$$2(n - 1).$$

Si la droite D a r points communs avec C_n , le nombre précédent doit être diminué de $2r$.

Nombre de plans osculateurs menés à C_n par un point donné P :

$$3(n-2).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de la courbe C_n , le nombre précédent doit être diminué de $3r$.

Nombre de plans surosculateurs à la courbe C_n :

$$4(n-3).$$

Nombre de sphères osculatrices à C_n et passant par un point donné P :

$$4(2n-3).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de C_n , le nombre précédent doit être diminué de $4r$.

Nombre de sphères surosculatrices à C_n :

$$5(2n-4).$$

Le théorème II nous conduira également, et avec autant de facilité, aux nombres suivants :

Nombre de plans tritangents à une courbe C_n :

$$\frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5).$$

Nombre de sphères quadritangentes à C_n :

$$\frac{2}{3}(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7).$$

Enfin, le théorème III nous conduira, de la même façon, aux nombres suivants :

Nombre de plans à la fois osculateurs et tangents à C_n :

$$6(n-3)(n-4).$$

Nombre de sphères à la fois osculatrices et tangentes à C_n :

$$8(2n-4)(2n-5).$$

Nous arrêtons cette énumération un peu longue, en faisant remarquer avec quelle facilité la méthode que nous venons de donner permet d'arriver à la détermination de ces nombres.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, défini sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Humbert : *Sur une certaine transformée homographique de la surface des ondes.*

M. Max Genty : *Sur les involutions d'espèce quelconque.*

M. Humbert : *Involutions qui peuvent exister sur des courbes de genre quelconque.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Stéphane Mangeot, présenté par MM. D. André et Raffy; M. Caronnet, présenté par MM. Darboux et Raffy; M. le prince Roland Bonaparte, présenté par MM. Poincaré et d'Ocagne; M. von Koch, présenté par MM. D. André et L. Lévy.

Communications :

M. Lemoine : *Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème.*

M. d'Ocagne : *Démonstration nouvelle du théorème de Fermat généralisé.*

M. Fouret : *Sur quelques relations caractéristiques entre les dérivées partielles de certaines fonctions symétriques de plusieurs variables.*

M. von Koch : *Sur les déterminants d'ordre infini.*

M. Raffy : *Sur la détermination des éléments linéaires doublement harmoniques.*

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Cellérier, présenté par MM. Poincaré et Sarrau ; M. Fehr, présenté par MM. Laisant et Raffy ; M. Paul Genty, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. D. André : *Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premiers nombres.*

M. Genty adresse, par l'intermédiaire de M. Laisant, un Mémoire de Géométrie vectorielle sur la théorie générale des surfaces.

M. Haton de la Goupillière : *Centre des moyennes distances des centres de courbure successifs.*

MM. Laisant et Fouret présentent quelques observations sur cette Communication.

M. Demoulin : *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires.*

M. D. André présente quelques observations sur cette Communication.

M. LUCIEN LÉVY donne quelques explications sur le Mémoire, extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dont il offre un exemplaire à la Société.

Le théorème suivant, déjà énoncé à une séance précédente, s'explique facilement par des considérations géométriques.

Si l'on fait tourner autour de son axe une surface-moulure de Monge dont le noyau est un cylindre de révolution, toutes les positions successives de cette surface constituent une famille d'un système triplement orthogonal.

On s'en rend compte aisément en remarquant que les sections

d'une de ces surfaces par un plan perpendiculaire à l'axe sont des développantes de cercles tous projetés orthogonalement suivant un même cercle, que les tangentes à ces cercles sont normales à toutes les développantes de leur plan, et, par suite, que les plans tangents au cylindre de révolution constituent une famille orthogonale à la famille précédente. Comme un quelconque des plans coupe une quelconque des surfaces suivant une de ses lignes de courbure, le système triplement orthogonal existe.

Il n'a pas été possible d'interpréter aussi simplement le résultat suivant, dont le Mémoire contient la démonstration analytique :

Si les cylindres de révolution, qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'un péricône symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite Δ du plan de symétrie du péricône, la translation parallèle à Δ de ce péricône donnera naissance à une série de surfaces qui constitueront une des trois familles d'un système triplement orthogonal.

Rappelons qu'un péricône symétrique est une surface enveloppe de sphères à directrice plane.

M. CARONNET fait la Communication suivante :

Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface.

Considérons sur une surface une famille quelconque de courbes, et soit

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$$

son élément linéaire, quand on la rapporte à ces courbes (u) et à leurs trajectoires orthogonales (v).

Les rayons de courbure géodésique des lignes coordonnées ont pour expressions

$$\begin{aligned} \rho_{gu} &= - \frac{AC}{\frac{\partial A}{\partial v}} = \frac{A}{r}, \\ \rho_{gv} &= \frac{AC}{\frac{\partial C}{\partial u}} = \frac{C}{r_1}; \end{aligned}$$

on les obtient au moyen de la formule générale connue (1)

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r du + r_1 dv;$$

d'autre part, les coordonnées des centres de courbure géodésique G, G', rapportés au trièdre de la surface (M, xyz) s'écrivent

$$\begin{aligned} (G) \quad & x = 0, \quad y = \rho_{gu}, \quad z = 0; \\ (G') \quad & x = -\rho_{gv}, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

Ceci posé, soit une famille (F) de trajectoires isogonales des courbes (u).

Les courbes de cette famille, coupant les lignes coordonnées sous le même angle constant ω , leur courbure géodésique est définie par

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos \omega}{\rho_{gu}} + \frac{\sin \omega}{\rho_{gv}},$$

et les coordonnées du centre de courbure géodésique Γ relatif à celle de ces courbes qui passe en M sont

$$x = -\rho_g \sin \omega, \quad y = \rho_g \cos \omega, \quad z = 0.$$

Nous voyons, par conséquent, que le point Γ appartient à la droite GG', qui a d'ailleurs pour équation

$$\frac{x}{-\rho_{gv}} + \frac{y}{\rho_{gu}} = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

En chaque point d'une surface, les centres de courbure géodésique de toutes les familles (F) de trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes (C) sont alignés suivant une droite (D).

Remarque I. — Supposons que deux des familles (F) soient formées de géodésiques, la droite (D) sera rejetée à l'infini; toutes les trajectoires isogonales seront des géodésiques et la surface donnée sera développable.

Nous retrouvons ainsi la proposition de Liouville.

(1) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*.

Remarque II. — Parmi toutes les trajectoires qui passent en M, il y en a une, et en général une seule, qui a son plan osculateur normal à la surface en ce point; elle a pour tangente la perpendiculaire à (D) issue de M.

S'il en existait deux jouissant de cette propriété, il en serait de même pour toutes les autres.

Remarque III. — Supposons que les courbes de deux familles (F) soient des cercles géodésiques de rayon constant, égal à ρ pour l'une, égal à ρ' pour l'autre. Dans ces conditions, la droite (D) est invariablement liée au trièdre de la surface, et toutes les trajectoires isogonales sont des cercles géodésiques, dont le rayon est le même quand on les associe par familles.

En remarquant que, parmi ces trajectoires, il existe une famille de géodésiques, et rapportant la surface à ces courbes et à leurs trajectoires orthogonales, on obtient pour son élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2,$$

Cette surface a sa courbure totale constante et égale à $-\frac{1}{a^2}$.

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Remarques sur les fonctions homogènes.

Une fonction homogène de plusieurs variables

$$u = f(x_1, x_2, \dots)$$

est définie, comme on le sait, par la relation

$$(1) \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots).$$

Le degré m de la fonction peut être positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable. On pourrait même le supposer imaginaire.

Le théorème d'Euler se déduit de l'identité (1) et s'exprime par la formule

$$(2) \quad x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots = m f(x_1, x_2, \dots).$$

Ce théorème est réciproque, c'est-à-dire que, si la formule (2) est vérifiée identiquement, la fonction f est homogène.

Si donc nous avons

$$(12) \quad u^{(2)} + au^{(1)} + bu = 0,$$

il faudra écrire

$$m + n = 1 - a, \quad mn = b,$$

d'où

$$(13) \quad m = \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{a^2 - 2a - 4b}), \quad n = \frac{1}{2}(1 - a - \sqrt{a^2 - 2a - 4b}).$$

L'équation (12) pouvant s'écrire

$$(14) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu = 0,$$

nous voyons donc que l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles du second ordre est

$$(15) \quad u = F(x, y) + G(x, y),$$

F et G étant deux fonctions homogènes arbitraires dont les degrés sont respectivement m et n déterminés par les relations (13).

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données.*

M. Fouret transmet une Note de M. R. Godefroy *Sur les courbes de Lamé.*

M. HUMBERT traite *Des involutions sur les courbes algébriques*. Il montre que, abstraction faite de la surface de Steiner, il n'existe pas de surface algébrique engendrée par des coniques et telle qu'en chacun de ses points passe plus d'une conique.

M. D'OCAGNE fait *Sur les suites récurrentes* une Communication qui se résume ainsi :

Lorsqu'une suite récurrente est définie, en outre des p termes initiaux $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$, par la relation

$$Y_n + A_1 Y_{n-1} + A_2 Y_{n-2} + \dots + A_p Y_{n-p} = 0,$$

on dit qu'elle répond à l'échelle d'ordre p ($A_1, A_2, \dots, A_p$).

Soit

$$\varphi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \dots + A_p = 0$$

l'équation génératrice de cette suite.

Si l'on pose

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \dots + A_i,$$

$$\psi(x) = Y_{p-1} + Q_1(x)Y_{p-2} + \dots + Q_{p-1}(x)Y_0,$$

on a ce théorème :

Lorsque les équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune α , la suite donnée répond à l'échelle d'ordre $p-1$ [$Q_1(\alpha), Q_2(\alpha), \dots, Q_{p-1}(\alpha)$].

On peut ainsi réduire l'échelle d'une suite donnée à sa plus simple expression.

Après avoir fait voir, au moyen de la considération des *suites fondamentales*, qu'il a introduites dans cette théorie ⁽¹⁾, que la série formée par les termes d'une suite récurrente est convergente lorsque l'équation génératrice n'a que des racines de module inférieur à l'unité, M. d'Ocagne démontre que cette condition suffisante est également nécessaire *lorsque l'échelle de la suite a été réduite à sa plus simple expression* ⁽²⁾.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; par
M. A. DEMOULIN.

1. Ce complexe, qui est du second ordre, a déjà été l'objet d'une étude approfondie, due à Painvin (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 49). Nous nous proposons d'en faire

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III, p. 78.

⁽²⁾ Ce résultat se trouve démontré dans un Mémoire développé sur les suites récurrentes qui est en voie de publication.

connaître ici un certain nombre de propriétés. A cet effet, nous démontrerons d'abord deux théorèmes concernant les surfaces du second ordre.

THÉORÈME I. — *Étant donnés, dans l'espace, des points P_i , au nombre de n , désignons par p_i la distance du point P_i à un plan mobile P . Cela posé, si l'on a*

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i p_i^2 = \rho,$$

les quantités a_i et ρ étant des constantes, le plan P enveloppera une surface du second ordre.

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées rectangulaires du point P_i et

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan P . On a

$$p_i = \frac{ux_i + vy_i + wz_i + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

d'où, en substituant dans (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i (ux_i + vy_i + wz_i + 1)^2 = \rho(u^2 + v^2 + w^2),$$

ou encore, tous calculs faits,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i x_i^2 \right) \\ & + v^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i y_i^2 \right) + w^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i z_i^2 \right) \\ & + 2vw \sum_1^n a_i y_i z_i + 2wu \sum_1^n a_i z_i x_i + 2uv \sum_1^n a_i x_i y_i \\ & + 2u \sum_1^n a_i x_i + 2v \sum_1^n a_i y_i + 2w \sum_1^n a_i z_i + \sum_1^n a_i = 0. \end{aligned} \right.$$

L'enveloppe du plan P est donc une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la quadrique centrale d'inertie relative à des masses a_i placées aux points P_i .

Ces considérations s'appliquent évidemment au cas où les masses a_i seraient en nombre infini et formeraient une matière continue.

L'équation (2) montre que si ρ varie, les quantités a_i restant constantes, l'équation (1) représente une famille de quadriques homofocales.

THÉOREME II. — *Étant donnée la quadrique*

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \\ + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0, \end{array} \right.$$

il existe une infinité de relations linéaires entre les carrés des distances d'un plan tangent quelconque à dix points fixes, pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Faisons, dans l'équation (2), $n = 10$, et identifions-la avec l'équation (3); nous aurons ainsi les dix équations linéaires

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_1^{10} a_i x_i^2 = a + \rho, & \sum_1^{10} a_i y_i^2 = a' + \rho, \\ \sum_1^{10} a_i z_i^2 = a'' + \rho, & \dots \dots \sum_1^{10} a_i = d. \end{array} \right.$$

Ces équations seront toujours compatibles, car, si le déterminant des coefficients des inconnues était nul, les dix points P_i seraient situés sur une surface du second ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous pourrions donc toujours déduire des équations (4) un système de valeurs des inconnues $a_1, \dots, a_{10}$. Ces valeurs dépendront des coefficients de l'équation (3) et de la quantité arbitraire ρ . Cela posé, entre les distances des dix points P_i à tout plan tangent de la quadrique (3), il existera la relation

$$(5) \quad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho.$$

Si l'on fait $\rho = 0$, on obtient la relation linéaire et *homogène*

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = 0.$$

2. Pour la facilité du langage, nous donnerons au complexe actuel le nom de *complexe de Painvin*. Ce complexe jouit de la propriété suivante :

Un complexe de Painvin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés d'une droite quelconque du complexe à dix points pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Soient D une droite quelconque du complexe de Painvin relatif à la quadrique (3) et P, P' les plans tangents rectangulaires que l'on peut mener à cette quadrique par la droite D. Soient p_i, p'_i, d_i les distances du point P_i respectivement au plan P, au plan P' et à la droite D. La formule (5) donne

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho, \quad \sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho,$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i^2 + p_i'^2) = 2\rho.$$

Or

$$p_i^2 + p_i'^2 = d_i^2,$$

par suite

$$(6) \quad \sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Le théorème est donc démontré. Si $\rho = 0$, la relation (6) se réduit à

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 0.$$

3. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver l'équation du complexe de Painvin par rapport à des axes rectangulaires quelconques. Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées pluckériennes (1) d'une droite D du complexe. La distance d_i

(1) Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées de deux points quelconques de la droite D. Nous poserons

$$\begin{aligned} \alpha &= x' - x'', & \beta &= y' - y'', & \gamma &= z' - z'', \\ p &= z' y'' - z'' y', & q &= x' z'' - x'' z', & r &= y' x'' - y'' x'. \end{aligned}$$

du point $P_i(x_i, y_i, z_i)$ à cette droite est donnée par la formule

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d_i^2 = & x_i^2 (\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\gamma^2 + \alpha^2) + z_i^2 (\alpha^2 + \beta^2) \\ & - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i \\ & + 2x_i (q\gamma - r\beta) + 2y_i (r\alpha - p\gamma) \\ & + 2z_i (p\beta - q\alpha) + p^2 + q^2 + r^2. \end{aligned}$$

Portant, dans (6), la valeur de d_i^2 et tenant compte des relations (4), nous obtiendrons l'équation du complexe, à savoir

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') \\ & - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' \\ & + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les axes des coordonnées coïncident avec les axes principaux de la quadrique (3),

$$b = b' = b'' = c = c' = c'' = 0,$$

et l'équation (7) devient

$$\alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0.$$

C'est, aux notations près, l'équation obtenue par Painvin dans le Mémoire cité.

4. La forme de l'équation (7) montre que :

Si une congruence est composée des droites communes aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques, représentées en coordonnées tangentielles par les équations

$$\Sigma = 0, \quad \Sigma' = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$\Sigma + \rho \Sigma' = 0,$$

dans laquelle ρ est un paramètre variable.

5. Soit

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

l'équation d'un complexe quadratique quelconque.

Considérons tous les complexes quadratiques définies par l'é-

quation

$$(8) \quad f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) + \rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Chacun de ces complexes renferme évidemment celles des droites du complexe

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

qui sont isotropes. Il suit de là que *les coniques, situées dans un même plan et relatives aux complexes (8), sont homofocales; et que les cônes de même sommet, relatifs aux complexes (8), sont homocycliques.*

Cela posé, soit la famille de quadriques homofocales

$$\begin{aligned} (a + \rho)u^2 + (a' + \rho)v^2 + (a'' + \rho)w^2 \\ + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0. \end{aligned}$$

Les complexes de Painvin relatifs à ces quadriques ont pour équation

$$\begin{aligned} \alpha^2(\alpha' + \alpha'') + \beta^2(\alpha'' + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \alpha') \\ - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b' - 2\gamma\alpha b' \\ + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' \\ + (p^2 + q^2 + r^2)d + 2\rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation rentrant dans le type de l'équation (8), nous pouvons énoncer ce théorème :

Les coniques, relatives à un plan, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homofocales.

Les cônes, relatifs à un point, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homocycliques.

6. Nous avons vu (n° 2) que le complexe de Painvin d'une quadrique quelconque

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho$$

est défini par l'équation

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Cela posé, soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho',$$

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho''$$

les équations de deux quadriques Q' , Q'' , homofocales à Q . Cherchons le complexe des droites D par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires P' , P'' tangents, l'un P' à la quadrique Q' , l'autre P'' à la quadrique Q'' . Soient p'_i , p''_i , d_i les distances du point P_i aux plans P , P' et à la droite D . On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2) = \rho' + \rho''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 = d_i^2,$$

par conséquent

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = \rho' + \rho''.$$

Si $\rho' + \rho'' = 2\rho$, cette équation représente le complexe de Painvin de la quadrique Q . De là ce théorème :

Le complexe de Painvin relatif à une quadrique Q peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires P' , P'' respectivement tangents à deux quadriques Q' , Q'' , homofocales à Q .

7. Le théorème I permet de démontrer simplement le théorème bien connu de Monge concernant le lieu du sommet O d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre.

Soient p'_i , p''_i , p'''_i les distances du point P_i aux faces de ce trièdre et r_i la distance OP_i . On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho, \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho, \quad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho.$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = 3\rho.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$(9) \quad \sum_1^{10} a_i r_i^2 = 3\rho.$$

Cette équation représente une sphère, ce qui démontre le théorème de Monge. Pour trouver l'équation de cette sphère en coordonnées cartésiennes, appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées rectangulaires du point P_i et (x, y, z) celles du point O ; on a

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

d'où, en substituant dans (9),

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \sum_1^{10} a_i - 2x \sum_1^{10} a_i x_i - 2y \sum_1^{10} a_i y_i - 2z \sum_1^{10} a_i z_i \\ + \sum_1^{10} a_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 3\rho = 0, \end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte des formules (4),

$$(x^2 + y^2 + z^2)d - 2xc - 2yc' - 2zc'' + a + a' + a'' = 0.$$

8. Le théorème de Monge est susceptible de la généralisation suivante, due à Bobillier (1) :

Si trois plans rectangulaires P' , P'' , P''' sont respectivement tangents à trois quadriques homofocales Q' , Q'' , Q''' , leur point commun O décrira une sphère concentrique à ces quadriques.

Soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho'', \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho''',$$

les équations des quadriques Q' , Q'' , Q''' . Appelons p'_i, p''_i, p'''_i et

(1) *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 329.

r_i les distances du point P_i aux plans P', P'', P''' et au point O .
On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'', \quad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho''',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = \rho' + \rho'' + \rho''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$\sum_1^{10} a_i r_i^2 = \rho' + \rho'' + \rho''.$$

Cette équation définit la sphère de Monge de la quadrique

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \frac{\rho' + \rho'' + \rho''}{3}.$$

Le théorème est donc démontré.

9. *Étant donnés dans l'espace n points fixes P_i , les droites qui satisfont à la condition*

$$(10) \quad \sum_1^n a_i d_i^2 = 2\rho$$

constituent un complexe de Painvin.

En effet, si l'on considère la quadrique qui correspond à l'équation

$$\sum_1^n a_i p_i^2 = \rho,$$

le complexe de Painvin relatif à cette quadrique sera défini par l'équation

$$\sum_1^n a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Pour s'en assurer, il suffit de répéter le raisonnement du n° 2.

Supposons, dans l'équation (10), n infini; nous obtiendrons le théorème suivant :

Un corps solide étant donné, les droites par rapport auxquelles le moment d'inertie de ce corps est constant engendrent un complexe de Painvin (1).

10. Si l'on fait $n = 2$, $\rho = 0$, l'équation (10) devient

$$(11) \quad a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 = 0$$

ou

$$(12) \quad d_1^2 = \lambda d_2^2,$$

pourvu qu'on pose

$$-\frac{a_2}{a_1} = \lambda^2.$$

Étudions le complexe représenté par l'équation (11).

On déduit de (12)

$$d_1 = \lambda d_2.$$

Le complexe actuel est donc celui des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant. Mais ce complexe est aussi le complexe de Painvin de la quadrique représentée par l'équation

$$p_1^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(p_1 + \lambda p_2)(p_1 - \lambda p_2) = 0.$$

Cette quadrique se compose des deux points F_1 , F_2 qui divisent harmoniquement, dans le rapport λ , le segment $P_1 P_2$.

Donc :

Le complexe des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est aussi celui des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires passant chacun par un point fixe.

Cette proposition aurait pu être établie également par des considérations de Géométrie pure.

11. On démontrerait sans peine que :

Le cône du complexe, relatif à un point quelconque S, admet

(1) Ce théorème a été énoncé, il y a quelques années, par M. Fouret dans une Communication verbale faite à la Société mathématique de France.

deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites SF_1 et SF_2 .

La conique du complexe, relative à un point quelconque P , admet comme foyers les projections orthogonales, sur ce plan, des points F_1 et F_2 .

12. Nous terminerons cette Note en démontrant une propriété du complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre

$$(13) \quad au^2 + a'v^2 + a'w^2 + d = 0.$$

Cette quadrique fait partie de la famille de quadriques homofocales

$$(a + \rho)u^2 + (a' + \rho)v^2 + (a' + \rho)w^2 + d = 0.$$

Pour $\rho = -a'$, cette équation se réduit à

$$(a - a')u^2 + d = 0$$

et représente deux points F_1 et F_2 , foyers d'une section méridienne quelconque de la quadrique (13). La propriété du n° 11, jointe à celle du n° 5, permet par conséquent d'énoncer ce théorème :

Si l'on considère le complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre, dont F_1 et F_2 sont les foyers d'une section méridienne quelconque, le cône du complexe, relatif à un point quelconque S , admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites SF_1 et SF_2 ; et la conique du complexe, relative à un plan quelconque P , admet comme foyers les projections orthogonales sur ce plan des points F_1 et F_2 .

Application de la Géométrie à l'examen de diverses solutions d'un même problème; par M. EM. LEMOINE.

M. d'Ocagne, ingénieur-adjoint à l'ingénieur en chef chargé du Service du nivellement général de la France, a eu à s'occuper, à propos de son service, de la question suivante :

n droites qui devraient concourir en un même point sont déterminées expérimentalement et, par suite, ne concourent pas exactement; trouver le point le plus probable de leur intersection commune.

A une séance de la *Société mathématique* (fin de 1891), M. d'Ocagne a traité le problème, et nous admettons, avec lui, dans ce qui suit, que le point le plus probable est le point tel que la somme des carrés de ses distances aux n droites soit un minimum.

Dans le cas où n serait égal à 3, ce serait donc le point de *Le-moine* du triangle formé par ces trois droites.

La construction que M. d'Ocagne indiqua alors pour obtenir ce point lui paraissant un peu compliquée, il en donna, à une autre séance, une modification qui la rendait plus simple et que j'appellerai *la construction A*.

M. Laisant, qui avait assisté à ces Communications, s'occupa également du problème et, à une troisième séance, présenta une autre construction que j'appellerai *la construction B*.

M. d'Ocagne fit ensuite à l'Académie des Sciences, par l'intermédiaire de M. Bouquet de la Grye, une Communication dans laquelle il fit connaître une nouvelle construction simplifiant beaucoup, *croyait-il*, celle qu'il avait donnée et que j'appellerai *la construction C*.

J'eus l'idée de comparer, par ma méthode de mesure de la simplicité des constructions, dont j'ai déjà indiqué ici les éléments (voir *Bulletin de la Société mathématique*, p. 162; séance du 4 juillet 1888), ces trois solutions pour évaluer leurs simplicités relatives lorsqu'il s'agit de les construire effectivement, évaluation dont le résultat n'a, le plus souvent, qu'un rapport fort éloigné avec la simplicité appréciée d'après l'exposé plus ou moins élégant et court de la solution et c'est le seul genre de simplicité dont les géomètres se soient occupés jusqu'ici; j'écrivis alors à M. d'Ocagne pour avoir quelques renseignements y relatifs, et, dans sa réponse, il me fit connaître une dernière solution dont la construction lui paraissait plus simple encore; nous l'appellerons *la construction D*. Il communiqua la construction D à la Société (séance du 2 novembre 1892).

Le but de cette Note est de donner, comme exemple de l'emploi de la méthode que nous avons imaginée, la mesure de la simplicité *théorique* de chacune des constructions A, B, C, D, afin de reconnaître quelle est celle qui est réellement la plus simple, le compas à la main, toutes choses égales d'ailleurs.

Pour permettre de nous suivre sans difficulté, nous donnerons d'abord le symbole de toutes celles des constructions fondamentales de la Géométrie qui nous serviront dans les évaluations particulières que nous allons faire.

Nous rappelons les notations que nous avons adoptées pour désigner les éléments irréductibles des constructions :

Mettre le bord de la règle sur un point : R_1 ; par suite, sur deux points : $2 R_1$; tracer une droite : R_2 .

Mettre *une* pointe du compas sur un point donné : C_1 ; par suite, chaque pointe sur un point : $2 C_1$.

Mettre une pointe sur un point indéterminé d'une ligne donnée : C_2 .

Tracer un cercle : C_3 .

Toute opération géométrique de la règle et du compas est donc représentée par

$$\text{Op.} : (m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3),$$

$m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ ou le nombre d'opérations élémentaires irréductibles est ce que nous appelons le *coefficient de Simplicité* ou, pour abrégé, *la Simplicité* ; $m_1 + n_1 + n_2$ est le *coefficient d'Exactitude* ou, pour abrégé, *l'Exactitude* ;

m_2 le nombre de droites, n_3 le nombre de cercles tracés.

Rappelons encore qu'il s'agit d'une simplicité théorique où les difficultés *matérielles* provenant des dimensions des données, de celles de la feuille d'épure, des instruments, des angles sous lesquels se coupent les droites, les cercles, etc. n'existent pas. Notre méthode, s'il m'est permis de prendre aussi haut nos comparaisons, est à la construction réelle à peu près ce que la Mécanique rationnelle est à la Mécanique pratique.

Pour abrégé l'écriture, nous convenons que

$$M(R) \text{ ou } M(AB)$$

signifiera le cercle qui a pour centre M et pour rayon R ou AB.

Op. : est l'abrégé du mot opération.

I. *Tracer une droite passant par deux points placés.*
Op. : $(2R_1 + R_2)$.

II. *Prendre avec le compas la longueur d'une ligne donnée.....* Op. : $(2C_1)$.

III. *Tracer un cercle quelconque :*
1^o *De centre donné.....* Op. : $(C_1 + C_3)$.
2^o *De centre et de rayon donnés.* Op. : $(3C_1 + C_3)$.

IV. *Placer, par rapport à une droite D, le point symétrique A' d'un point A.*
Je trace A(R), R étant quelconque, qui coupe D en B et C. Op. : $(C_1 + C_3)$.
Je trace B(R), C(R) qui se coupent en A'.
Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.
Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 6; exactitude : 3; 3 cercles.

V. *Placer le sommet b d'un parallélogramme ObAC connaissant O, A, B; OA, OB étant deux côtés, tracés ou non, du parallélogramme.*
Je trace A(OB)..... Op. : $(3C_1 + C_3)$.
Je trace B(OA)..... Op. : $(3C_1 + C_3)$.
Ces deux cercles se coupent en b.
Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.

Simplicité : 8; exactitude : 6; 2 cercles.

VI. *Par un point A, mener une droite parallèle à une droite donnée BC.*
a. Je trace un cercle quelconque passant par A; mais de rayon assez grand pour qu'il coupe BC en B et en C.
Op. : $(C_1 + C_3)$.
Je prends BA..... Op. : $(2C_1)$,
puis je trace C(DA) qui coupe en D (du même côté de BC que A) le premier cercle tracé.... Op. : $(C_1 + C_3)$.

je trace AD..... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 6; 1 droite, 2 cercles.

b. Je trace A(R) qui coupe BC en B, R quelconque
mais assez grand pour couper BC. ... Op. : $(C_1 + C_3)$,
je trace B(R) qui coupe BC en C.... Op. : $(C_1 + C_3)$,
puis C(R) qui coupe A(R) en B du même côté de BC
que A..... Op. : $(C_1 + C_3)$,
enfin je trace AD... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

Remarquons que ces deux méthodes sont plus simples
que la méthode classique, laquelle donnerait pour symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude 7; 1 droite, 3 cercles.

c. *Cas où BC n'est pas tracée, donnée seulement par
deux points B et C.*

Je prends BC et je trace A(BC).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Je prends AB et je trace C(AB).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Ces deux cercles se coupent en D (du même côté de BC
que A); je trace AD qui est la droite cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2).$$

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude : 8; 1 droite, 2 cercles.

VII. *Diviser, au point D, une droite BC dans le rapport
de deux longueurs données M et N; $\frac{BX}{XC} = \frac{M}{N}$.*

Par B je mène une droite quelconque.

$$\text{Op. : } (R_1 + R_2).$$

je prends M et je trace B(M) qui coupe cette droite en D.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je prends N et je trace D(N) qui coupe cette droite en E.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

B, D, E se succédant dans l'ordre où nous les nommons;
par D (sans tracer EC), je mène une parallèle à EC qui
coupe BC en X. Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$.

Op. : $(3R_1 + 2R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

Simplicité : 21; exactitude 15; 2 droites, 4 cercles.

VII bis. *Diviser une droite dans le rapport de deux NOMBRES donnés m et n.*

Cette question paraît la même que celle de diviser une droite dans le rapport de deux longueurs données; mais, au point de vue général de la *construction* théorique à effectuer à l'aide de la *Géométrographie*, elle en est profondément différente; comme elle se présentera pour placer le centre de gravité de n masses égales (construction XII), nous sommes obligé d'entrer, à son sujet, dans d'assez longs détails.

L'introduction, dans cet énoncé, de l'idée *générale* de nombre, fait que la construction sort du domaine de la construction *pure*, et l'on ne trouve pas de méthode *générale*, indépendante de m et de n , pour l'exécuter, pas plus, du reste, que l'on n'en trouve une pour construire *le plus simplement possible* une droite m fois plus grande qu'une droite donnée, quel que soit m .

Chaque problème particulier qui amène à diviser une certaine droite dans le rapport de deux nombres *particuliers*, dérivant alors de ce problème, doit donc être étudié à part au point de vue de la *Géométrographie*.

En pratique, on transforme ces nombres en longueurs au moyen d'une règle divisée, mais on sort ainsi des deux seuls instruments, la règle et le compas, dont nous nous permettons l'usage en *Géométrographie pure*.

On pourrait rentrer dans le cadre de la *Géométrographie*, comme nous allons le montrer, mais la méthode

qu'il faudrait suivre s'éloigne tellement de ce qui est réellement fait, que nous ne l'adoptons pas. Ces deux problèmes, les seuls que nous connaissions dans ce cas, ne se présentent du reste pour ainsi dire jamais en Géométrie *pure* avec le sens général du nombre; car, chaque fois que l'idée de nombre s'introduit, c'est un nombre particulier en relation avec des propriétés qui ne conviennent qu'à la question particulière traitée; ainsi, *placer le milieu d'une droite* conduit à la diviser dans le rapport de 1 à 1. La propriété que *les médianes d'un triangle se coupent dans le rapport de 1 à 2* conduit à ce rapport de 1 à 2, pour lequel on a ainsi une construction particulière n'indiquant rien pour d'autres rapports, etc.

Diviser en D une droite BC dans le rapport des deux nombres m, n , $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ avec $m < n$ conduirait, par la *Géométrie* et sans nouvelles conventions, à la construction générale suivante : par B je mène une droite quelconque. Op. : $(R_1 + R_2)$, je trace $B(r)$, r étant une longueur quelconque, qui coupe cette droite en B_1 , puis $B_1(r)$ qui coupe la même droite en B_2 , etc.; puis $B_{n-1}(r)$ qui coupe la même droite en B_n .

Op. : $[n(C_1 + C_3)]$,

je mènerai par B_m une parallèle à $B_n C$ sans tracer $B_n C$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$,

et cette parallèle couperait BC au point de division cherché.

Op. : $[3R_1 + 2R_2 + (n + 6)C_1 + (n + 2)C_3]$.

Mais cette manière de procéder est, comme nous l'avons dit, si loin de la façon réelle d'opérer que nous ne voulons point l'admettre, elle ne serait jamais la plus simple possible dans chaque cas particulier, ainsi que cela résulte des explications précédentes. C'est pour la même raison que nous ne créons pas un nouveau symbole qui permettrait de serrer de plus près ce que l'on pourrait faire graphiquement pour porter, à la suite, une série de n longueurs égales sur une droite donnée à partir de BC. En effet, on prend avec le compas la longueur à porter; on met une

pointe en B, et la laissant en B, on met la seconde pointe sur la droite en B₁, etc., et nous n'avons pas spécifié de symbole pour exprimer l'opération qui consiste à mettre la seconde pointe sur une ligne tracée lorsque la première est fixe, car nous n'y avons vu qu'une complication des principes de la théorie et pas d'avantages.

Nous supposerons donc, dans ce problème et dans ceux qui sortent de la *Géométrographie* pure, comme ceux de la Statique, que les nombres m et n étant donnés, nous avons toujours deux lignes dans le rapport de m à n . Cela est vrai, en pratique, puisqu'on se sert de règles divisées.

Pour diviser une ligne dans le rapport des nombres m et n , nous admettrons donc, en général, le même symbole que pour diviser la droite dans le rapport de deux lignes données.

Ce qui prouve bien la justesse de l'idée de ne pas considérer cette construction comme une construction graphique proprement dite, c'est que, dès qu'on la travaille, on se heurte à des problèmes de nombres fort délicats et quelquefois non résolus, questions qui par essence sont évidemment étrangères à l'art graphique proprement dit. Par exemple, examinons le problème suivant :

Construire une ligne qui soit n fois une longueur donnée l ; je supposerai n un nombre assez élevé. Je double l , j'ai $2l$; je double $2l$ sur la droite, j'ai 2^2l ; je double 2^2l , j'ai 2^3l , et ainsi de suite 2^2l , 2^3l , ...; je m'arrête à $2^{2^x}l$. Lorsque 2^{2^x+1} serait plus grand que n , il me reste alors à porter encore $n - 2^{2^x}$ fois la longueur l ; on voit facilement, en étudiant le problème, qu'il revient à peu près à celui-ci :

Combien, au moins, faut-il faire de multiplications pour élever un nombre A à la puissance n ? Problème de nombres qui me semble fort difficile.

J'ai montré, cette année 1892, au Congrès de l'Association française, à Pau, comment l'étude de ces construc-

tions où entre l'idée générale de *nombre* conduisait à la résolution, en nombres entiers, d'une certaine équation indéterminée, soit à deux, soit à trois variables.

VIII. *En P mener une perpendiculaire à une droite PJ donnée.*

Je trace un cercle $O(R)$ de rayon quelconque R et de centre quelconque O , mais passant par P .

$Op. : (C_1 + C_2),$
ce cercle coupe PJ en P' . Je trace $P'O$ qui coupe $O(R)$ en Q et je trace PQ $Op. : (4R_1 + 2R_2).$

PQ est la perpendiculaire cherchée.

$$Op. : (4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3).$$

Simplicité : 8; exactitude : 5; 2 droites, 1 cercle.

IX. *Abaisser d'un point C , hors d'une droite donnée AB , une perpendiculaire à AB .*

a. Méthode classique.

Je trace $C(R)$, R étant quelconque mais suffisant pour couper AB en A et en B $Op. : (C_1 + C_3),$
je trace $A(R)$, $B(R)$ qui se coupent en C' .

$Op. : (2C_1 + 2C_3),$
je trace CC' $Op. : (2R_1 + R_2).$

$$Op. : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

b. Méthode un peu plus simple.

B étant un point quelconque de AB , je décris $B(BG)$ qui coupe AB en A $Op. : (C_1 + C_2 + C_3),$
je prends AC et je décris $A(AC)$ qui coupe $B(BG)$ en C' .

$Op. : (2C_1 + C_3),$
je trace CC' qui est la perpendiculaire cherchée.

$$Op. : (2R_1 + R_2).$$

$$Op. : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 2 cercles.

c. AB n'est pas tracée.

Je trace B(BC), A(AC) qui se coupent en C et C'.

Op. : $(4C_1 + 2C_3)$,

je trace CC'. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Simplicité 9; exactitude 6; 1 droite, 2 cercles.

X. *Faire avec une droite donnée BC, en un point donné B, un angle égal à un angle donné DAE.*

Je trace un cercle A(AE) de rayon quelconque.

Op. : $(C_1 + C_3)$,

il coupe AD en D, AE en E, D et E étant sur les côtés de l'angle DAE.

Je trace B(AE) qui coupe BC en F. Op. : $(C_1 + C_3)$,
je prends DE et je trace F(DE) qui coupe B(AE) en H.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je trace BH; HBC est l'angle cherché. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 11; exactitude : 7; 1 droite, 3 cercles.

XI. *Sur QQ' comme diamètre décrire une circonférence.*

Je décris, avec un rayon $R > \frac{1}{2}QQ'$, Q(R), Q'(R) qui se coupent en C et en C'. Op. : $(2C_1 + 2C_3)$,
je trace CC' qui coupe QQ' en son milieu O.

Op. : $(2R_1 + R_2)$,

je trace O(OQ'). Op. : $(2C_1 + C_3)$,
qui est le cercle cherché.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 10; exactitude : 6; 1 droite, 3 cercles.

XII. *Placer le centre de gravité de n masses égales appliquées en des points donnés $A_1, A_2, \dots, A_n$.*

Je prends un point quelconque O et je place le sommet K_1 du parallélogramme $OA_1K_1A_2$ sans tracer ni OA_1 , ni OA_2 , puis de même le sommet K_2 du parallélogramme $OK_1K_2A_3$, etc.; enfin le sommet K_{n-1} du parallélogramme $OK_{n-2}K_{n-1}A_n$. chaque opération de placement d'un som-

met étant donné par. Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
 K_{n-1} est placé par. Op. : $[(n-1)(6C_1 + 2C_3)]$,
 je trace OK_{n-1} Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je divise OK_{n-1} en G , de façon que $\frac{OG}{GK_{n-1}} = \frac{1}{n}$ (*voir*
 VII *bis*), en opérant la construction VII diminuée de
 $R_1 + R_2$, puisque j'ai déjà tracé des droites passant par O .
 Op. : $(2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

J'ai donc le centre de gravité G des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3].$$

Simplicité : $8n + 14$; exactitude : $6n + 10$; 2 droites;
 $2(n+1)$ cercles.

Remarquons qu'il sera souvent nécessaire, en pratique, de modifier un peu cette construction, car si n est assez grand, il peut quelquefois devenir difficile de diviser OK_{n-1} dans le rapport $\frac{1}{n}$, parce que le segment OG serait trop petit; on peut alors faire comme il suit :

On partage les n points A en deux groupes, l'un

$$A_1, A_2, \dots, A_p,$$

l'autre

$$A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_n.$$

Soit G_1 le centre de gravité des points $A_1, \dots, A_p$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(p+1)C_1 + 2(p+1)C_3];$$

soit G_2 le centre de gravité des points $A_{p+1}, \dots, A_n$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n-p+1)C_1 + 2(n-p+1)C_3].$$

G m'est donné en joignant G_1, G_2 ,

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2),$$

et divisant G_1, G_2 dans le rapport $\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{n-p}{p}$:

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3);$$

G est donc ainsi obtenu par le symbole :

$$\text{Op. : } [12R_1 + 6R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+3)C_3].$$

L'opération est alors plus compliquée de

$$\text{Op. : } (8R_1 + 2R_2 + 18C_1 + 4C_3).$$

Entrons maintenant dans l'examen des constructions A, B, C, D.

CONSTRUCTION A (PREMIÈRE DE M. D'OCAGNE).

Soient $d_1, d_2, \dots, d_n$ les n droites données; pour trouver le point M tel que la somme des carrés de ses distances aux n droites d_p soit minima, j'opère ainsi :

1° Je place, au moyen d'un seul cercle tracé, les points symétriques A_p , d'un point arbitraire O du plan, par rapport aux n droites $d_p, \dots, \dots$ Op. : $[2n C_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité G des points A_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je trace par O une perpendiculaire à OG (OG déjà tracée).
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3)$.

Cette perpendiculaire coupe en P et en P' le cercle décrit de O comme centre pour obtenir les A_p .

4° Je mène par P' des parallèles aux droites d_p , parallèles qui coupent une seconde fois le même cercle au point B_p , en me servant pour mener toutes ces parallèles d'un seul cercle passant par P'.

$$\text{Op. : } [2nR_1 + nR_2 + (3n+1)C_1 + (n+1)C_3].$$

5° Je trace P(OP) dont j'aurai besoin plus tard (voir 10°).
Op. : $(C_1 + C_3)$.

6° Je place le centre de gravité H des points B_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

7° Je trace PH et j'abaisse de O une perpendiculaire sur PH.
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un lieu de M.

- 8° Je place un point G_1 (sans tracer OG_1) tel que PG_1 soit équipollent à OG_1 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
- 9° De même, je place un point J , tel que PJ soit équipollent à HG_1 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
- 10° Je trace PJ et en P j'élève une perpendiculaire à PJ .
Op. : $(6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3)$.
- J'appelle Q le point de cette perpendiculaire, tel que $PQ = OP$, Q est sur $P(OP)$ déjà tracé (voir 5°); soit Q' le point diamétralement opposé à Q sur le cercle $O(OP)$.
- 11° Je joins OH qui coupe en h le cercle déjà tracé de diamètre PP' .
Op. : $(2R_1 + R_2)$.
- 12° Je mène par Q' une parallèle à $P'h$ (sans tracer $P'h$).
Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$
parallèle qui coupe en K le cercle (déjà tracé) qui a QQ' pour diamètre.
- 13° Je porte sur PK le segment $PK = OH$. . Op. : $(3C_1 + C_3)$.
- 14° Je trace QK et par P je mène une perpendiculaire à QK .
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un deuxième lieu du point M , qui est obtenu ainsi par le symbole :

$$\text{Op. : } [2(n+15)R_1 + (n+15)R_2 + (17n+43)C_1 + (7n+22)C_3].$$

Simplicité : $27n + 110$; exactitude : $19n + 73$; $(n+15)$ droites, $(7n+22)$ cercles.

CONSTRUCTION B (1) (DE M. LAISANT).

- 1° Je place les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport aux n droites données. Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.
- 2° Je place le centre de gravité G des points O_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

(1) Je ferai remarquer que je ne donne pas la justification des constructions indiquées, laquelle n'a rien de commun avec le but de ce travail; j'ai pris ces constructions telles qu'elles m'ont été communiquées par leurs auteurs, en conservant leurs notations qui sont différentes pour chaque construction.

- 3° Je décris $O(OG)$, $B(OG)$ Op. : $(4C_1 + 2C_3)$.
 OG coupe $O(OG)$ en B , $B(OG)$ servira dans la suite (voir 8°).
- 4° Par B je mène des parallèles aux n droites données en me servant d'un seul cercle passant par B et coupant les n droites.
 Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n + 1)C_1 + (n + 1)C_3]$.
 Ces parallèles coupent le cercle $O(OG)$ en $E_1, E_2, \dots, E_n$.
- 5° Je place le centre de gravité H des points E .
 Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n + 1)C_1 + 2(n + 1)C_3]$.
- 6° Je place le sommet K d'un parallélogramme $OGHK$.
 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
- 7° Je trace OK Op. : $(2R_1 + R_2)$.
- 8° Je fais l'angle $ZGM = KOH$. Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3)$,
 en me servant des cercles $O(OG)$, $B(OG)$ et appelant M
 le point de rencontre de OK et de GM .
- M est le point cherché obtenu par le symbole
- Op. : $[2(n + 6)R_1 + (n + 6)R_2 + (17n + 26)C_1 + (7n + 11)C_3]$.
- Simplicité : $27n + 55$; exactitude : $19n + 38$; $(n + 6)$ droites,
 $7n + 11$ cercles.

CONSTRUCTION C (DEUXIÈME DE M. D'OCAGNE).

- 1° D'un point O quelconque du plan j'abaisse des perpendiculaires sur les n droites données (en ne me servant que d'une seule circonférence), soit D_p le pied de l'une d'elles.
 Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (2n + 1)C_1 + (2n + 1)C_3]$.
- 2° Je place le centre de gravité G des points D_p .
 Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n + 1)C_1 + 2(n + 1)C_3]$.
- 3° Je mène par O des parallèles aux n droites données en ne me servant que d'un seul cercle passant en O .
 Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n + 1)C_1 + (n + 1)C_3]$.
- 4° Sur OG (déjà tracée pour avoir G) comme diamètre, je décris une circonférence et j'appelle E_p les points de rencontre de cette circonférence avec les parallèles aux droites don-

nées menées par O Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

5° Je place le centre de gravité H des points E_p .

Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

6° J'élève en O une perpendiculaire OK à OG.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$,

en me servant du cercle tracé pour avoir les points D.

7° Par H je mène une parallèle à OG qui coupe OK en K.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

8° Je trace GH Op. : $(2R_1 + R_2)$.

9° En O j'élève à OH (déjà tracée pour avoir H) une perpendiculaire qui coupe en I la droite GH; j'utilise pour cela le cercle tracé pour avoir les points D_p . Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

10° Je mène par G une perpendiculaire à IK, sans tracer IK (construction IX, c) . . . Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

M, point cherché, est à l'intersection de OH avec cette perpendiculaire; il est obtenu par le symbole

Op : $[4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+13)C_3]$.

Simplicité : $30n+75$; exactitude : $21n+50$; $2(n+6)$ droites, $(7n+13)$ cercles.

CONSTRUCTION D (TROISIÈME DE M. D'OCAGNE).

1° Je prends les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport à toutes les droites données.

Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité O' des points O'_p .

Op. : $[4R_1 + 2C_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je prends les symétriques O''_p de O' par rapport à toutes les droites données Op. : $[(2n+1)C_1 + (2n+1)C_3]$.

4° Je place le centre de gravité O'' des points O''_p .

Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

5° Je fais angle $O''O'M = O''OO'$ sans tracer $O'O''$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$.

M, point cherché, est à la rencontre de OO'' et de MO' ; il est obtenu par le symbole

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $8n + 9$ cercles.

RÉSUMÉ.

Construction A.

$$\text{Op. : } [2(n+15)R_1 + (n+15)R_2 + (17n+43)C_1 + (7n+22)C_3].$$

Simplicité : $27n + 110$; exactitude : $19n + 73$; $(n+15)$ droites, $(7n+12)$ cercles.

Construction B.

$$\text{Op. : } [2(n+6)R_1 + (n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+11)C_3].$$

Simplicité : $27n + 55$; exactitude : $19n + 38$; $(n+6)$ droites, $(7n+11)$ cercles.

Construction C.

$$\text{Op. : } [4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+13)C_3].$$

Simplicité : $30n + 75$; exactitude : $21n + 50$; $2(n+6)$ droites, $(7n+13)$ cercles.

Construction D.

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $(8n + 9)$ cercles.

On voit que, à tous égards, la construction D est de beaucoup la plus simple. Remarquons aussi que le nombre de droites dont elle exige le tracé est toujours 5, quel que soit n .

La construction B est *toujours* plus simple, d'une façon absolue, que les constructions A et C, puisque les coefficients de R_1 , R_2 , C_1 , C_2 y sont tous plus petits que ceux de la construction A.

La construction C est plus simple que A pour $n \leq 11$, moins simple dans le cas contraire.

On peut donc les ranger ainsi

D, B, A et C,

par ordre de simplicité décroissante; il faut remarquer toutefois que C est préférable à A, comme nous l'avons dit, pour les valeurs de n inférieures à 12.

Cet exemple montre la *nécessité* d'un criterium, car en estimant la chose, comme on l'a toujours fait jusqu'ici au point de vue spéculatif, M. d'Ocagne pensait évidemment que la construction C, présentée à l'Académie postérieurement à son premier essai A était préférable, tandis que le contraire a lieu s'il ne s'agit plus d'une proposition spéculative, mais d'une construction, ce qui était le cas.

Si n a une valeur petite, 3, 4, 5 par exemple, on trouve facilement des méthodes particulières *beaucoup plus simples* que les constructions générales comparées ici.

La détermination de la simplicité et de l'exactitude théoriques des constructions doit paraître, au premier abord, fort longue parce qu'elle est assez difficile à détailler par écrit brièvement; mais elle est, en réalité, très rapide, puisque, ayant établi une fois pour toutes les symboles des constructions composantes qui se retrouvent toujours les mêmes dans toutes les questions, on n'a à faire que quelques additions de petits nombres.

Les simplifications à ces constructions générales, qui peuvent être appliquées dans chaque cas traité, se font aussi très rapidement dès qu'on a nommé quelques constructions comme exercice.

Je borne là ce que je veux dire ici à propos de la *Géométrographie* ou *art des constructions géométriques* (voir, pour plus de détails, le volume du Congrès de Pau, 1892, de l'Association française pour l'avancement des Sciences); mais, comme, à l'origine de mes études sur ce sujet, j'en ai parlé à la Société mathématique (*loco citato*), je veux ajouter quelques mots nécessaires pour expliquer les différences entre certains résultats que j'obtenais alors et ceux que je donnerais aujourd'hui, si ce petit travail était à refaire (voir d'ailleurs, pour plus de détails, mon Mémoire du Congrès de Pau).

D'abord je n'avais encore eu que l'idée de l'évaluation de la simplicité des constructions qui étaient effectuées et j'étais loin de me douter que toutes les constructions fondamentales, qui se trouvent, depuis Euclide, dans les Traités de Géométrie et au moyen

desquelles je faisais mes évaluations, sont trop compliquées, c'est-à-dire que j'admettais implicitement qu'elles étaient les plus simples possible; s'il y en avait plusieurs, je choisisais celle qui s'énonçait le plus simplement; je suivais le texte géométrique sans y chercher systématiquement les simplifications, recherche qui est maintenant l'un des objets principaux de la *Géométoprographie*.

Par exemple, pour évaluer la simplicité de la construction nécessaire pour placer un point M donné par ses coordonnées cartésiennes x et y , par rapport à deux axes Ox , Oy , j'avais pris, comme au hasard, cette construction évidente :

Prendre $Ox' = x$ sur Ox , par x' mener une parallèle à Oy , enfin prendre, sur cette parallèle et dans le sens convenable, $x'M = y$, ce qui me conduisit alors à

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 11C_1 + 5C_2)$$

pour le cas des axes obliques; simplicité : 19; et s'ils étaient rectangulaires à

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2).$$

A cette époque, je n'avais pas vu encore que la construction classique de mener, par un point donné, une parallèle à une droite était simplifiable; je ne m'occupais pas du coefficient d'Exactitude, plus important certainement que le coefficient de Simplicité, etc.

Il est évident, même sans évaluation d'aucune espèce, que la construction suivante est plus simple et que c'est elle que j'aurais dû choisir; mais l'examen de la chose ne m'était même pas venu à l'idée, parce que la première était plus courte à exprimer, ce qui était la simplicité spéculative comme l'entendent jusqu'ici les Géomètres.

Maintenant, mis en éveil par l'expérience, je chercherais la construction la plus simple et j'opérerais ainsi pour placer le point M : je trace $O(x)$ qui coupe Ox en x' et $O(y)$ qui coupe Oy en y' ,

$$\text{Op. : } (6C_1 + 2C_2),$$

puis je trace $x'(y')$

$$\text{Op. : } (C_1 + C_2),$$

je reprends x entre les branches du compas et je trace $y'(x)$ qui

coupe $x'(y)$ en M

Op. : $(3C_1 + C_2)$;

en tout :

Op. : $(10C_1 + 4C_2)$.

Simplicité : 14; exactitude : 10; 4 cercles.

Si je me sers de deux compas, j'économise $2C_1$, puisque je n'ai pas besoin de reprendre x entre les branches du compas et le symbole est :

Op. : $(8C_1 + 4C_2)$.

Simplicité : 12; exactitude : 8; 4 cercles, au lieu de : simplicité : 19; exactitude : 13; 1 droite; 5 cercles, ainsi que j'avais obtenu.

Il y aurait d'autres observations du même genre à faire sur d'autres points de détail de notre Note de 1888; nous croyons inutile de nous y arrêter puisqu'elles ne touchent nullement la doctrine, mais son application rationnelle que nous ne savions pas encore faire complètement.



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XX.

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	v
Liste des Sociétaires perpétuels.....	vi
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1892.....	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son <i>Bulletin</i>	xv
Sur la fonction exponentielle; par M. D'ARONE.....	2
Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique; par M. FOURET.....	4
Transformation d'un polynôme entier; par M. LAISANT.....	6
Note relative aux points centraux; par M. FÉLIX LUCAS.....	10
Note relative au symbole $\bar{e}$, et en général à l'opération p^1 ; par M. LAISANT.....	12
Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux; par M. LUCIEN LÉVY.....	15
Sur certaines surfaces spirales; par M. RAFFY.....	16
Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse; par M. FÉLIX LUCAS.....	17
Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique; par M. APPELL.....	21
Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèle; par M. L. RAFFY.....	22
Sur les polygones inscrits dans les coniques; par M. FÉLIX LUCAS.....	33
Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique; par M. FOURET.....	35
Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate; par M. FOURET.....	38
Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique; par M. CATALAN....	40
Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches; par M. DEMOULIN.....	43
Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante; par M. L. RAFFY.....	47
Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	49
Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques; par M. FOURET.....	60

	Pages.
Sur un problème de Géométrie; par M. LAISANT.....	65
Sur les singularités des courbes algébriques planes; par M. BICCHE.....	67
Égalités à deux et à trois degrés; par M. FROLOV.....	69
Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales; par M. MANGROT.....	84
Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures; par M. CARONNET.....	91
Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. BLUTEL.....	92
Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions; par M. SCHLEGEL.....	97
Une lettre d'ABEL TRANSON.....	104
Sur les involutions d'espèce quelconque; par M. MAX GENTY.....	107
Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface; par M. CARONNET.....	115
Remarques sur les fonctions homogènes; par M. C.-A. LAISANT.....	117
Des involutions sur les courbes algébriques; par M. HUMBERT.....	121
Sur les suites récurrentes; par M. D'OCAGNE.....	121
Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; par M. A. DEMOULIN.....	122
Application de la Géométrie à l'examen de diverses solutions d'un même problème; par M. ÉM. LEMOINE.....	132
Table des matières du tome XX.....	151

FIN DE LA TABLE DU TOME XX.



PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS LE FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888).

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT ET UNIÈME.

PARIS.
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1895

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich (décédé).
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
DE MENDIZABAL TAMBORÉL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAPPY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARRY, contrôleur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1893 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
-----------------------------------	---	---

Président.....	MM.	HUMBERT.
Vice-Présidents.....	{	DE COMBEROUSSE. GOURSAT. PICQUET. POINCARÉ.
Secrétaires.....	{	KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires.....	{	CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste.....		BIOCHE.
Trésorier.....		CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1896. APPELL, 1894. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1896. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1894. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1894. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.
---	---	---

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

1927, Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Date
de
admission.

1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. **CHAILAN** (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1881. **CHEMIN**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1873. **CIVIALE**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. **COLLIGNON**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. **COLOT**, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. **COMBEROUSSE** (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. **COIRCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. **CRAIG** (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. **CREMONA**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. **CRETIN**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. **DARBOUX**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. **DAUTHEVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. **DEFFORGES**, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. **DELANTOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. **DEMARTRES**, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, rue Royer-Collard, 14, à Paris.
1883. **DERUYTS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. **DEWULF**, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabatau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. **DREYFUS** (Camillo), député, quai Voltaire, 3, à Paris.
1886. **DUNCAN**, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. **DURRANDE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. **DYCK** (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1873. **FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. **FAUQUENBERGUE**, professeur au Lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. **FERR** (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue de Vaugirard, 46, à Paris.
1885. **FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. **FIELDS** (John), professeur de Mathématiques, Alleghany College, à Meadville (Etats-Unis d'Amérique).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1891. **FONTVIOLANT** (DE), répétiteur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1884	PICARD.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1885	APPELL.
1875	BIENAYMÉ.	1886	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1887	FOURET.
1877	MANNHEIM.	1888	LAISANT.
1878	DARBOUX.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1879	O. BONNET.	1890	HATON DE LA GOUILLIÈRE.
1880	JORDAN.	1891	COLLIGNON.
1881	LAGUERRE.	1892	VICAIRE.
1882	HALPHEN.	1893.	HUMBERT.
1883	ROUCHE.		

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich (décédé).
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
DE MENDIZABAL TAMBORREL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. de).
RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARBY, contrôleur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

■ admission.

1892. KOCH (H. von), maître de Conférences à l'Université de Stockholm, rue Corneille, 5, à Paris.
1880. KÖNIGS, professeur suppléant au Collège de France, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. KÖBB (Gustaf), Gothenbourg (Suède).
1881. LACON, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tablat (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 2, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès-sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 141, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timoficoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMBORÉL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique), S. P.

Date
de
l'admission

1884. **MEDCEREAU**, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris. S. P.
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **NEKHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North B. wanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Selessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (v'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. **OVIDIO** (Enrico v'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Bardin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **PARMENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. **PAUTOXNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saumur (Haute-Loire).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de Mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse, S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1872. **RIBAUCOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.

lon.

- . **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
- . **ROUQUET**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
- . **ROUSSELIN**, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
- . **RUSO** (Giovanni), professeur, palazzo Serravalle, via Azanci, 2, à Catanzaro (Italie).
- . **SAINT-PAUL** (Ducré de), lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
- . **SARAZ**, professeur de Mathématiques, rue Saint-Sulpice, 25, à Paris.
- . **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 *bis*, à Saint-Mandé (Seine).
- . **SARTIAUX**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- . **SAEVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
- . **SCHLEGEL** (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
- . **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
- . **SÉGUY**, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
- . **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
- . **SIMART**, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
- . **STARKOFF** (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
- . **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
- . **STIELTJES**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
- . **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
- . **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
- . **TANNERY** (Paul), directeur des Manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris. S. P.
- . **TANNERY** (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
- . **TARRY** (Gaston), contrôleur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger, S. P.
- . **TCHÉBICHEFF**, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
- . **TERRIER**, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
- . **TISSERAND**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.
- . **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
- . **TRESCA**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
- . **VACQUANT**, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
- . **VANDAME**, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
- . **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
- . **VANECEK** (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
- . **VASCHY**, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
- . **VICAIRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
- . **VITO VOLTERRA**, professeur à l'Université de Pise (Italie).

Date
de
l'admission.

1880. **WALCKENAEK**, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris
1879. **WEILL**, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au V^e ~~arrondissement~~ (Seine-et-Oise).
1873. **WEYR** (D^r Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. **WEYR** (D^r Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche) ~~arrondissement~~.
1882. **WILSON**, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUDSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Ostergade, 10, à Copenhague (Danemark) —
-

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprinzen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich (décédé).
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
DE MENDIZABAL TAMBORÉL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARRY, contrôleur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1893 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
-----------------------------------	---	---

Président.....		MM. HUMBERT.
----------------	--	--------------

Vice-Présidents.....	{	DE COMBEROUSSE. GOURSAT. PICQUET. POINCARÉ.
----------------------	---	--

Secrétaires	{	KOENIGS. RAFFY.
-------------------	---	--------------------

Vice-Secrétaires.....	{	CARVALLO. L. LÉVY.
-----------------------	---	-----------------------

Archiviste.....		BIOCHE.
-----------------	--	---------

Trésorier.....		CLAUDE-LAFONTAINE.
----------------	--	--------------------

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1896. APPELL, 1894. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1896. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1894. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1894. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.
---	---	---

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1884	PICARD.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1885	APPELL.
1875	BIENAYMÉ.	1886	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1887	FOURET.
1877	MANNHEIM.	1888	LAISANT.
1878	DARBOUX.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1879	O. BONNET.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1880	JORDAN.	1891	COLLIGNON.
1881	LAGUERRE.	1892	VICAIRE.
1882	HALPHEN.	1893.	HUMBERT.
1883	ROUCHÉ.		

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue d
Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. **ANTOMARI**, directeur des études à l'Ecole Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1879. **APPELL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. **ARNAUD**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1892. **ARNOUX** (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. **BEGHIN** (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (1).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre
l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. **BEYENS** (Ignacio), major du Génie, Santa Inés, 5, à Cadix (Espagne).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), directeur du matériel, au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. **BIOCHE**, professeur au Collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris, S. P.
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. **BJERKNES**, professeur à l'Université, à Christiania (Norvège).
1891. **BLUTEL**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée Saint-Louis,
Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), Cours la Reine, 22, à Paris.
1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. **BOULANGER**, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieure
(Algérie).
1886. **BRAULT** (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan
(Italie).
1872. **BRISSE** (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 18, à Paris.
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme), S. P.
1886. **BRUNEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges
Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris. S. P.
1885. **CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. **CARONNET**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, avenue de Wagram
à Paris.
1887. **CARVALLO**, examinateur à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Passy-Paris.
1887. **CASPARY**, professeur à l'École d'Architecture, Markgrafenstrasse, 16, Berlin (Allemagne).
1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, rue des Éburons, 21, à Liège (Belgique).
1890. **CEDERCRANTZ** (baronne Nanny, née de Lagerborg), à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), rue Claude-Bernard, 63, à Paris.

(1) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

- 1887 . CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
 1888 . CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
 1881 . CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
 1884 . CRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
 1873 . CIVALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
 1875 . CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
 1872 . COLLIGNON, inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
 1890 . COLOT, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
 1875 . COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
 1872 . COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
 1884 . CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
 1877 . CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
 1880 . CRETIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
 1872 . DABDOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
 1885 . DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
 1881 . DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
 1882 . DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
 1885 . DENARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
 1892 . DEMOULIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, rue Royer-Collard, 14, à Paris.
 1883 . DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
 1872 . DEWULF, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabatau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
 1882 . DREYFUS (Camille), député, quai Voltaire, 3, à Paris.
 1886 . DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
 1872 . DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
 1885 . DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
 1873 . FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
 1888 . FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
 1891 . FAUCEMBERGUE, professeur au Lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
 1892 . FEHR (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue de Vaugirard, 46, à Paris.
 1885 . FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
 1885 . FIELDS (John), professeur de Mathématiques, Alleghany College, à Meadville (Etats-Unis d'Amérique).
 1881 . FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
 1872 . FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
 1891 . FONTVILANT (DE), répétiteur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 39, Paris-Auteuil.
 1889 . FOUCHÉ, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 6, à Paris, S. P.
1892. **PROLOV** (le général), quai Pierre Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. **GABRIEL**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **CEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).
1890. **GENTY** (Max), enseigne de vaisseau, à bord du *Héron*, à Kotonou (Afrique).
1892. **GENTY** (Paul), rue Gay-Lussac, 14, à Paris.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1881. **GOUSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. **GUIMARAES**, officier du Génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin. 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. **HENRY**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. **ISSALY** (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), Docteur en Philosophie, rue Fédérale. 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).

1892. KOCH (H. von), maître de Conférences à l'Université de Stockholm, rue Corneille, 5, à Paris.
1880. KÖNIGS, professeur suppléant au Collège de France, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. KÖBB (Gustaf), Gothenbourg (Suède).
1881. LACOR, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tablat (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 2, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès-sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 141, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timoficoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique), S. P.

Date
de
l'admission

1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau. 21, à Paris, S. P.
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **MUKHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhatnagar, Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (v'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. **OVIDIO** (Enrico v'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barre, 22, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **PARMENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. **PAUTONNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de Mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. de), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse, S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (de), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1872. **RIBAUCCOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROUQUET**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **ROUSSELIN**, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. **RUSO** (Giovanni), professeur, palazzo Serravalle, via Azanci, 2, à Catanzaro (Italie).
1881. **SAINT-PAUL** (Ducur de), lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. **SARAZ**, professeur de Mathématiques, rue Saint-Sulpice, 25, à Paris.
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL** (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1877. **SÉGUY**, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. **SIMART**, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. **STARKOFF** (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. **STIELTJES**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des Manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris. S. P.
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), contrôleur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger, S. P.
1882. **TCHÉBICHEFF**, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. **TERRIER**, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1872. **TISSERAND**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.
1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. **VACQUANT**, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. **VANDAME**, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. **VANECEK** (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. **VASCHY**, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. **VICAIRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. **VITO VOLTERRA**, professeur à l'Université de Pise (Italie).

Date
de
l'admission

1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris. S. P.
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **NUKHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Rho-wanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Selessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (D'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. **OIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barren-tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **PARMENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. **PAUTOXNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de Mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytech-nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse, S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supé-rieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1872. **RIBAUCCOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédac- teur D ^r Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprin- zen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dacteur D ^r Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Date
de
l'admission.

1880. **WALCKENAER**, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris
1879. **WEILL**, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. **WEYR** (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. **WEYR** (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
1882. **WILSON**, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUDSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZAREWBA**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Ostersogade, 10, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur D ^r Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprinzen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft	École Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur D ^r Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JANVIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

La Société procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Communications :

M. Fouret : *Sur certains complexes du second ordre qui jouent un rôle dans la théorie des moments d'inertie.*

M. Demoulin présente une observation sur le même sujet.

M. ÉMILE PICARD adresse la Note suivante :

Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes.

L'article très intéressant que M. Hurwitz vient de consacrer dans le dernier cahier des *Mathematische Annalen* aux transformations birationnelles des courbes en elles-mêmes me remet en mémoire une leçon que je fis sur ce sujet dans mon cours de 1889. Je m'étais simplement proposé de montrer comment on peut établir d'une manière immédiate ce théorème, énoncé, je crois, pour la première fois comme très probable par M. Klein, qu'il ne peut y avoir, pour $p > 1$, une infinité *discontinue* de transformations birationnelles d'une courbe en elle-même. Il suf-

fit, pour cela, de suivre absolument la même marche que j'avais suivie pour établir une proposition analogue sur les surfaces algébriques dans mon Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Math.*, 1889); c'est cette démonstration que je voudrais rappeler ici rapidement.

On connaît le théorème de M. Schwarz, d'après lequel une courbe de genre supérieur à l'unité ne peut admettre une infinité de transformations birationnelles en elle-même *dépendant d'un paramètre arbitraire*. J'en ai donné (*loc. cit.*, Chap. III) une démonstration très simple, à l'aide de la considération des intégrales de première espèce.

C'est de ce théorème que peut se déduire immédiatement la proposition que nous avons en vue. Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe de genre p ($p > 1$) et de degré m , admettant une infinité de transformations birationnelles en elle-même. Considérons p polynômes adjoints d'ordre $m - 3$ linéairement indépendants

$$Q_1(x, y), \quad Q_2(x, y), \quad \dots, \quad Q_p(x, y).$$

En désignant par (x, y) et (x', y') deux points correspondants dans une transformation, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} \frac{Q_1(x, y) dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} &= A_1 \frac{Q_1(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}} + \dots + A_p \frac{Q_p(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}}, \\ \frac{Q_2(x, y) dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} &= B_1 \frac{Q_1(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}} + \dots + B_p \frac{Q_p(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

les A et les B étant des constantes. Il en résulte

$$(1) \quad \frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)} = \frac{A_1 Q_1(x', y') + \dots + A_p Q_p(x', y')}{B_1 Q_1(x', y') + \dots + B_p Q_p(x', y')}.$$

La transformation birationnelle $(x, y), (x', y')$ pourra donc être obtenue au moyen d'une équation de la forme (1), où les A et B sont des constantes convenables. Or, prenant *a priori* cette relation (1), on peut chercher à déterminer les constantes A et B de manière qu'elle détermine une transformation birationnelle entre les points $(x, y), (x', y')$ de la courbe proposée. On ob-

tiendra ainsi un certain nombre d'équations de conditions entre les A et les B; ou bien ces équations de conditions détermineront les A et les B, ou bien une ou plusieurs de ces lettres resteront arbitraires. Par conséquent, la transformation sera déterminée (c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un nombre limité de transformations), ou bien elle dépendra au moins d'un paramètre arbitraire. Mais, d'après le théorème de M. Schwarz, cette dernière circonstance ne peut se présenter, et la proposition se trouve par suite établie.

SÉANCE DU 18 JANVIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : MM. Buisson et Quintard, présentés par MM. Laisant et Élie Perrin; M. Hioux, présenté par MM. Laisant et Antomari.

Communications :

M. Demoulin : *Sur une classe particulière de courbes gauches.*

M. D'OCAGNE fait une Communication *Sur les suites récurrentes.*

Il résout d'abord le problème suivant : *Le polynôme générateur d'une suite récurrente étant décomposé en un produit de facteurs, exprimer son terme général en fonction des termes des suites ayant ces facteurs pour polynômes générateurs.*

Il établit ensuite ce théorème : *Toute fonction algébrique entière des intégrales de plusieurs suites récurrentes est elle-même l'intégrale d'une suite récurrente*; et montre comment on peut former le polynôme générateur de cette suite.

A titre de corollaire, il établit cette proposition :

Les puissances $\mu^{\text{ième}}$ des nombres entiers, pris dans leur ordre naturel, forment une suite récurrente dont le polynôme générateur est $(x - 1)^{2\mu}$.

M. HUMBERT fait la Communication suivante :

Sur une propriété des cônes du second ordre.

LEMME. — *Toute courbe algébrique d'ordre pair $2p$, tracée*

sur un cône du second ordre, est l'intersection complète du cône et d'une surface d'ordre p .

Ce lemme est une conséquence immédiate d'une propriété des quadriques établie par Halphen dans le Tome I (p. 19) de ce Bulletin ; on en déduit, en passant, que *toute courbe d'ordre impair, $2p + 1$, tracée sur un cône du second ordre, forme, avec une génératrice quelconque du cône, l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre $p + 1$.*

Si l'on observe maintenant qu'une courbe quelconque du cône, comptée deux fois, forme une courbe d'ordre pair, on a, en vertu du lemme, le théorème suivant, qui n'a peut-être pas été remarqué :

THÉORÈME. — *Le long de toute courbe algébrique tracée sur un cône du second ordre on peut circonscrire au cône une surface algébrique, ne coupant pas le cône en dehors de la courbe considérée.*

Cette dernière propriété, qui n'entraîne d'ailleurs pas les deux précédentes, est curieuse ; elle n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles. Les quadriques générales, les cônes d'ordre supérieur à deux ne la possèdent pas. Dans un Mémoire qui doit paraître au Tome IX du *Journal de Mathématiques* nous montrerons qu'elle s'applique à la surface de Kummer, mais nous n'en connaissons pas d'autres exemples.

SÉANCE DU 1^{er} FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Théorème sur le centre des moyennes distances.*

M. Fouret : *Sur le complexe tétraédral.*

M. Demoulin : *Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand.*

M. Humbert : *Évaluation de quelques aires sur le paraboloïde.*

M. Arnoux adresse une Note sur un appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs.

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Caldarera, présenté par MM. Jordan et Fouret; M. l'abbé Rivereau, présenté par MM. Appell et Kœnigs; M. Passerat, présenté par MM. de Presle et Lucien Lévy.

Communications :

M. Bioche : *Sur les séries alternées.*

M. Bioche : *Sur les courbes anharmoniques.*

M. Demoulin : *Définition géométrique des complexes quadratiques dont la surface de singularités se décompose en une quadrique et deux plans.*

M. Humbert : *Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloides elliptique.*

M. Carvallo présente à la Société un *Traité de Mécanique* qu'il vient de publier et signale certaines démonstrations contenues dans cet Ouvrage.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Théorème sur le centre des moyennes distances;

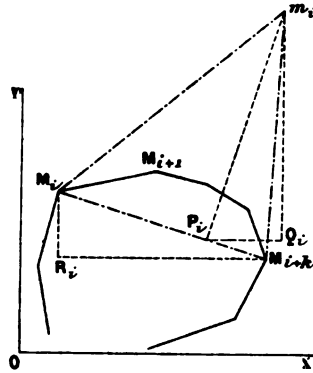
par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. *Considérant un polygone plan quelconque de n côtés, on réunit consécutivement ses sommets de k en k par des cordes de jonction. Sur ces diverses cordes on construit des polygones de p côtés, tous semblables entre eux, mais d'ailleurs sans aucune relation avec la forme du proposé. Le centre des moyennes distances des np sommets de ces n polygones sera toujours le même que celui des n sommets du proposé.*

Pour établir cette proposition, commençons par envisager le cas d'un triangle $M_i m_i M_{i+k}$, toujours semblable à lui-même, con-

struit sur la corde variable $M_i M_{i+k}$ du polygone proposé; et rapportons la figure à un système d'axes rectangulaires XOY.

Fig. 1.



L'abscisse du sommet m_i de ce triangle sera égale à celle du pied P_i de sa hauteur $m_i P_i$, augmentée de la projection $P_i Q_i$ de cette hauteur sur l'axe OX. Le triangle $M_i m_i M_{i+k}$ restant semblable à un type déterminé, le point P_i partage sa base $M_i M_{i+k}$ dans un rapport fixe. Son abscisse peut donc s'exprimer, en fonction de celles X_i, X_{i+k} des extrémités, sous la forme

$$\frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta}.$$

En second lieu, les triangles $m_i P_i Q_i$ et $M_i M_{i+k} R_i$ sont semblables l'un à l'autre, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. Il en résulte que $P_i Q_i$ est avec $M_i R_i$, ou $Y_i - Y_{i+k}$, dans le rapport constant de $m_i P_i$ à $M_i M_{i+k}$. On peut donc représenter ce segment par

$$\gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Il s'ensuit, pour l'abscisse x_i du point m_i , l'expression

$$x_i = \frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta} + \gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Reproduisons cette équation n fois, en remplaçant successivement l'indéterminée i par les nombres 1, 2, 3, ..., n ; et ajoutons membre à membre. Chaque ordonnée Y_j apparaîtra deux fois dans le résultat avec les coefficients γ et $-\gamma$. Tous les Y dispa-

raissent par suite identiquement. Chaque abscisse X_j figurera de son côté deux fois avec les coefficients

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

dont la somme se réduit à l'unité. Il vient dès lors simplement

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n.$$

2. Considérons maintenant un polygone de p côtés construit sur la corde $M_i M_{i+k}$, et réunissons chacun de ses $p - 2$ sommets m_i , autres que ceux M_i, M_{i+k} qui lui sont communs avec le proposé, à ces deux derniers par des droites de jonction. Ces divers points deviendront individuellement les sommets de triangles qui restent semblables à eux-mêmes quand on passe d'une corde à l'autre en faisant varier i . L'équation précédente leur est donc applicable, et l'on peut écrire en abrégé

$$\Sigma X_i = \Sigma x_i,$$

en étendant par la pensée la somme qui figure dans le second membre aux n sommets *homologues* d'un sommet choisi à volonté parmi les $p - 2$ non communs au proposé.

Écrivons cette égalité successivement pour ces $p - 2$ points, et encore pour les deux derniers qui fournissent à cet égard de simples identités. Ajoutant le tout membre à membre, on obtiendra

$$p \Sigma X = \Sigma \Sigma x,$$

ou, en divisant par np ,

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma \Sigma x}{np},$$

ce qui démontre la proposition, puisque l'axe des abscisses reste absolument quelconque.

3. Il serait aisé, au moyen d'hypothèses particulières, variées de diverses manières, de constituer certains énoncés plus simples et parfois plus expressifs. Quelques-uns d'entre eux ont même pu déjà se rencontrer, par exemple le suivant.

Faisons $k = 1$, de manière à prendre pour cordes les côtés eux-mêmes; et en second lieu $p = 3$, en réduisant à des triangles les polygones semblables entre eux. Nous retrouverons ainsi le théorème général de M. Laisant (¹).

(¹) LAISANT, *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française

4. On peut concevoir que des constructions convenablement imaginées aient pour résultat de réduire indéfiniment les dimensions du système quand on les répète successivement sur les polygones ainsi dérivés les uns des autres, et fassent converger ces derniers vers un point. S'il en est ainsi, ce point, quel que soit le mode de construction capable de cette particularité, ne pourra être que le centre des moyennes distances du polygone proposé.

Je citerai comme exemple cette remarque déjà connue ⁽¹⁾ que, si l'on joint ensemble les milieux des côtés d'un polygone, puis les milieux des côtés de cette nouvelle figure, et ainsi de suite indéfiniment, les polygones successifs tendent indéfiniment à se réduire au centre des moyennes distances des sommets du proposé.

Sur une classe particulière de courbes gauches ;

par M. DEMOULIN.

1. Dans une Note intitulée : *Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches* ⁽²⁾, nous avons démontré le théorème suivant :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un conoïde de Plücker.

pour l'avancement des Sciences, Comptes rendus du Congrès du Havre, 1877, p. 144).

Si en outre on aplatit le triangle sur sa base, on obtient une propriété identique pour le polygone formé par les points qui divisent dans un rapport fixe les côtés du polygone ; en d'autres termes, pour des mobiles qui décriraient ces côtés uniformément, ou, plus généralement, avec des vitesses constamment proportionnelles à ces côtés, en partant tous à la fois des divers sommets pour atteindre ensemble le sommet suivant. [LAISANT, *Sur certaines propriétés des centres de gravité* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1882, t. X, p. 40). — LAQUIÈRE, *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés du centre de gravité* (Ibid., p. 132). — RESAL, *Note Sur la généralisation d'un théorème de Pappus* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e série, t. XX, p. 337)].

Si l'on fait encore en particulier $n = 3$, en réduisant à un triangle le polygone proposé, l'on retrouve par cette voie un théorème de Pappus.

⁽¹⁾ D'OCAGNE, *Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 9^e année, 1885-1886, p. 237).

⁽²⁾ Bulletin de la Société mathématique de France. t. XX, p. 43.

Par des considérations de Géométrie cinématique, encore inédites, M. Mannheim a étendu ce théorème aux courbes de M. Bertrand. Nous nous proposons, dans cette Note, de chercher toutes les courbes jouissant de la propriété en question.

2. Soient Ox , Oy , Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ) . L'axe hélicoïdal, relatif au déplacement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites, a pour équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{z}{x} = -\frac{\tau}{\rho}, \\ y = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2}, \end{cases}$$

ρ et τ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O .

Ces équations montrent que l'axe hélicoïdal coupe à angle droit la normale principale; par suite, si une courbe est telle que l'axe hélicoïdal instantané décrive, par rapport au trièdre principal, un conoïde de Plücker, ce conoïde admettra nécessairement l'axe des y comme ligne de striction.

3. Cherchons l'équation la plus générale d'un conoïde de Plücker occupant, par rapport aux axes des coordonnées, la position indiquée. L'équation la plus simple de ce conoïde est

$$axz + y(x^2 + z^2) = 0,$$

a désignant une constante. Si l'on imprime à cette surface un mouvement hélicoïdal mesuré par une translation α le long de l'axe des y et par une rotation ω autour de cet axe, l'équation du conoïde deviendra

$$\alpha(x \cos \omega + z \sin \omega)(x \cos \omega - z \sin \omega) + (y - \alpha)(x^2 + z^2) = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$A xz + B x^2 + C z^2 + D y(x^2 + z^2) = 0,$$

A , B , C , D désignant des constantes indépendantes.

4. Cela posé, remplaçons dans l'équation ci-dessus y et $\frac{z}{x}$ par les valeurs (1); il viendra

$$(2) \quad \frac{A}{\rho} - \frac{B}{\tau^2} - \frac{C}{\rho\tau} + \frac{D}{\rho^2} = 0.$$

Cette relation caractérise complètement les courbes cherchées. L'hypothèse $B = 0$ donne les courbes de M. Bertrand :

$$A - \frac{C}{\tau} + \frac{D}{\rho} = 0.$$

5. Faisons, dans (2), $C = 0$; nous aurons

$$(2)' \quad \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau^2} + \frac{C}{\rho^2} = 0.$$

La courbe définie par cette équation constitue la solution la plus générale du problème suivant :

En un point O d'une courbe (Γ), on mène une normale OA faisant un angle constant avec la normale principale à la courbe (Γ) en ce point. On demande de trouver toutes les courbes (Γ) telles que les droites OA soient les binormales d'une autre courbe (Γ').

Soit O' le point où la droite OA s'appuie sur la courbe (Γ'). Posons $OO' = l$ et appelons (α, β, γ) les cosinus directeurs de la droite OA par rapport aux axes Ox, Oy, Oz du trièdre principal relatif au point O.

Rappelons maintenant quelques résultats concernant la théorie des courbes gauches. Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point O' par rapport aux axes du trièdre principal relatif à un point O d'une courbe gauche quelconque. Si ce trièdre se déplace de manière que la vitesse du point O soit constante et égale à l'unité, les composantes de la vitesse et de l'accélération du point O' seront

$$\begin{aligned} V_x &= 1 - ry + \frac{dx}{ds}, & J_x &= -rV_y + \frac{dV_x}{ds}, \\ V_y &= rx - pz + \frac{dy}{ds}, & J_y &= rV_x - pV_z + \frac{dV_y}{ds}, \\ V_z &= py + \frac{dz}{ds}, & J_z &= pV_y + \frac{dV_z}{ds}. \end{aligned}$$

Dans ces formules, s désigne l'arc de la courbe; on a posé, pour la simplicité,

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad p = -\frac{1}{\tau}.$$

Dans le cas actuel,

par suite

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= l\beta, & z &= l\gamma; \\ V_x &= 1 - r l \beta, \\ V_y &= -p l \gamma + \beta \frac{dl}{ds}, \\ V_z &= p l \beta + \gamma \frac{dl}{ds}. \end{aligned}$$

En exprimant que la vitesse du point O' est perpendiculaire à $O'O$, on trouve que l doit être constant; les composantes de la vitesse se réduisent donc à

$$(3) \quad \begin{cases} V_x = 1 - r l \beta, \\ V_y = -p l \gamma, \\ V_z = p l \beta. \end{cases}$$

On trouve ensuite, pour les composantes de l'accélération,

$$(4) \quad \begin{cases} J_x = l \gamma p r - l \beta r', \\ J_y = r(1 - l r \beta) - p^2 l \beta - l \gamma p', \\ J_z = -p^2 l \gamma + l \beta p', \end{cases}$$

les accents dénotant des dérivées relatives à l'arc.

La binormale à la courbe (Γ') au point O' est évidemment parallèle au vecteur dont les composantes N_x, N_y, N_z sont données par les formules

$$\begin{aligned} N_x &= V_y J_z - V_z J_y, \\ N_y &= V_z J_x - V_x J_z, \\ N_z &= V_x J_y - V_y J_x. \end{aligned}$$

A cause des relations (3) et (4), les valeurs de N_x, N_y, N_z peuvent s'écrire, toutes réductions faites,

$$(5) \quad \begin{cases} N_x = p l [p^2 l - \beta r(1 - \beta r l)], \\ N_y = p^2 l (\beta \theta' + \gamma), \\ N_z = r + p^2 r l^2 - 2 r^2 l \beta - l \beta p^2 + l^2 r^3 \beta^2 + p^2 \gamma l \theta', \end{cases}$$

pourvu qu'on pose

$$(6) \quad -l \beta \frac{r}{p} + \frac{1}{p} = 0, \quad \frac{d\theta}{ds} = \theta'.$$

Exprimons que la binormale de la courbe (Γ') au point O' coïn-

cide avec $O'O$; nous aurons

$$\frac{N_x}{\alpha} = \frac{N_y}{\beta} = \frac{N_z}{\gamma},$$

ou, en tenant compte des formules précédentes,

$$\begin{aligned} p^2 l - \beta r(1 - \beta r l) &= 0, \\ \gamma^2 p l &= \beta(r + p^2 r l^2 - 2 r^2 l \beta - l \beta p^2 + l^2 r^2 p^2). \end{aligned}$$

Or il est aisé de voir que ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre. Les courbes cherchées sont donc définies par l'équation

$$(7) \quad \frac{\beta}{\rho} = l \left(\frac{\beta^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right),$$

laquelle a le même degré de généralité que l'équation (2)'.

Notre assertion se trouve donc justifiée.

Si $\beta = 1$, la droite OO' coïncide avec la normale principale O et l'équation (7) devient

$$\frac{1}{\rho} = l \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right).$$

Elle définit les courbes dont les normales principales sont les binormales d'une autre courbe.

6. Les formules établies au n° 5 permettent de résoudre un certain nombre de problèmes relatifs aux courbes gauches. Posons-nous, par exemple, cette question :

En un point O d'une courbe gauche (Γ) , on mène une normale OA faisant avec la normale principale un angle constant. Trouver toutes les courbes (Γ) pour lesquelles les droites OA seront les normales principales d'une autre courbe (Γ') .

Soit O' le point où la droite OA rencontre la courbe (Γ') . On démontrera, comme précédemment, que la longueur $OO' = l$ doit être constante. On achèvera d'exprimer toutes les conditions du problème en écrivant que la droite OO' est perpendiculaire à la binormale de la courbe (Γ') au point O' , ce qui donnera

$$\beta N_y + \gamma N_x = 0.$$

ou, en tenant compte des formules (5),

$$(8) \quad \gamma r[(1 - r l \beta)^2 + p^2 l^2] + p^2 l \theta' = 0.$$

En prenant pour θ une fonction arbitraire de l'arc s , les équations (6) et (8), résolues par rapport à r et à p , nous donneront la courbure et la torsion de toutes les courbes satisfaisant à la question. Nous trouverons ainsi

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{l \theta'}{\gamma(\theta^2 + l^2)},$$

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\theta} + \frac{l^2 \beta \theta'}{\gamma \theta(\theta^2 + l^2)}.$$

Expression de quelques aires sur le parabolôïde elliptique;
par M. G. HUMBERT.

Dans un Mémoire inséré aux tomes V et VI du *Journal de Mathématiques* (4^e série), j'ai donné une formule simple permettant d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire d'une calotte ellipsoïdale, limitée par une conique le long de laquelle le cône circonscrit à l'ellipsoïde est de révolution. La même méthode s'applique à l'évaluation d'une aire analogue sur le parabolôïde elliptique, mais le résultat est beaucoup plus simple, puisqu'on arrive, pour l'aire cherchée, à une expression algébrique et même rationnelle.

Voici la marche des calculs, qui sont tout à fait élémentaires.

Soit le parabolôïde elliptique

$$(1) \quad \frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0;$$

on suppose $p > 0$, $q > 0$ et $p > q$.

Le lieu des sommets des cônes de révolution réels circonscrits à la surface (1) est une des paraboles focales, ou plutôt la partie de la parabole extérieure à la surface; les équations de cette focale sont

$$(2) \quad y = 0, \quad z^2 - 2x(p - q) = p(p - q).$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de la courbe (2), par rap-

port au paraboloïde, a pour équation

$$(3) \quad X + Z \frac{z}{q} + x = 0;$$

proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone comprise, sur le paraboloïde, entre ce plan P et le plan polaire P' d'un point

$$(x + dx, z + dz)$$

infinitement voisin de (x, z) , sur la parabole focale (2).

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z) , circonscrit au paraboloïde : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections faites dans le paraboloïde par les plans P et P'. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents au paraboloïde le long de la section P font avec l'axe du cône, on a, pour la zone projetée, la valeur $d\sigma \sin \theta$, et, en désignant par ω et $\omega + d\omega$ les aires des sections P et P', par λ et λ' les angles des plans P et P' avec l'axe du cône, il viendra

$$(4) \quad d\sigma \sin \theta = (\omega + d\omega) \sin \lambda' - \omega \sin \lambda.$$

L'axe du cône est la tangente en (x, z) à la parabole focale (2); ses équations sont donc

$$(5) \quad Y = 0, \quad X(p - q) - Zz + (p - q)(x + p) = 0$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{pz}{\sqrt{(z^2 + q^2)[z^2 + (p - q)^2]}}, \\ \sin \lambda' &= \frac{pz + (p - q)dz}{\sqrt{[(z + dz)^2 + q^2][z^2 + (p - q)^2]}}. \end{aligned}$$

Si l'on développe $\sin \lambda'$ suivant les puissances croissantes de dz , il vient, en négligeant les termes en dz^2 ,

$$\sin \lambda' = \sin \lambda + dz q \frac{q(p - q) - z^2}{(z^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} [z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

$\sin \theta$ se calcule aisément; on trouve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{p(p - q)}}{\sqrt{z^2 + (p - q)^2}}.$$

Enfin ω , aire de la section faite dans le paraboloïde (1) par le plan (3), a pour expression

$$\omega = \pi \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{p - q} [z^2 - q(p - q)].$$

On aura $\omega + d\omega$ en changeant, dans cette expression, z en $z + dz$. Portons maintenant dans (4) les valeurs de $\sin \theta$, $\sin \lambda$, $\sin \lambda'$, ω et $\omega + d\omega$; il vient, en divisant tout par $[z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} d\sigma \sqrt{p(p - q)} \frac{p - q}{\pi \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{3}{2}}} = & - \frac{q}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} [z^2 - q(p - q)]^2 dz \\ & + \frac{pz}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{z dz}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} [z^2 - q(p - q)] \right. \\ & \left. + (z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z dz \right\}, \end{aligned}$$

ou, en réduisant;

$$d\sigma \frac{(p - q)^{\frac{3}{2}}}{\pi p} q^{\frac{3}{2}} = \frac{z^2 - q(p - q)}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} [z^2(p - q) + q^2(p - q)] dz + 2pz^2 dz,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} [(3p - q)z^2 - q(p - q)^2] dz.$$

On a ainsi l'expression de $\frac{d\sigma}{dz}$ en fonction *entière* de z ; on en déduit l'aire σ de la calotte de paraboloïde qui a pour base le plan P :

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p - q}{3} z^3 - q(p - q)^2 z \right] + \text{const.}$$

La constante se détermine en écrivant que σ est nul lorsque le plan P touche le paraboloïde, c'est-à-dire lorsque le pôle (x, z) de ce plan est un des ombilics du paraboloïde. Or les deux ombilics réels sont à l'intersection de la surface avec la focale (2); on trouve ainsi, pour le z de l'ombilic situé au-dessus du plan des xy ,

$$z = \sqrt{q(p - q)};$$

et, par suite, on a, pour l'aire cherchée.

$$(6) \quad \sigma = \frac{\pi p}{p^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} z^3 - q(p-q)^2 z \right] - \frac{2}{3} \pi p q.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, qui résume cette Note :

Soit un cône de révolution circonscrit au parabolôïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0 \quad (p > 0, \quad q > 0, \quad p > q);$$

son sommet est dans le plan $Y = 0$; désignons par x et z ses deux autres coordonnées, et supposons, par exemple, z positif. L'aire σ de la calotte de parabolôïde, qui a pour base le plan polaire du sommet du cône, est une fonction entière, du troisième ordre, de z , et elle est donnée par la formule (6).

Vérification. — Si le parabolôïde est de révolution, on a $p = q$ et z est toujours nul; l'aire σ se présente alors sous forme indéterminée. Mais, si l'on remplace z par sa valeur en fonction de x , tirée de (2), on trouve pour σ , dans le cas général,

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} (p+2x)^{\frac{3}{2}} - q(p-q)(p+2x)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{2}{3} \pi p q,$$

et si l'on fait $p = q$, il vient

$$\sigma = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right],$$

formule qui se vérifie sans difficulté, en cherchant l'aire engendrée par la révolution, autour de son axe, de la portion de la parabole

$$Y^2 + 2pX = 0,$$

qui est comprise entre le sommet et la droite polaire du point $(x, 0)$.

Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique; par M. G. HUMBERT.

Une formule que j'ai fait connaître ailleurs ⁽¹⁾ permet d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire comprise sur un ellipsoïde entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à une sphère, le centre de la sphère étant supposé sur un des axes de la quadrique.

En essayant d'appliquer cette formule au paraboloïde elliptique, j'ai reconnu que les fonctions elliptiques disparaissent et qu'on arrive à une expression rationnelle remarquablement simple; c'est cette expression qui va être donnée ici.

Voici la formule pour le cas de l'ellipsoïde :

Soit une sphère, de rayon R, dont le centre est situé à une distance l du centre d'un ellipsoïde, sur l'axe de longueur 2a; l'aire ellipsoïdale, s définie plus haut, a pour valeur

$$(1) \quad \begin{cases} s = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} (\zeta u + u) - 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} (pu - 1) \frac{\sigma_1 u \sigma u}{\sigma_2 u \sigma_3 u} \\ - 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} \frac{a^2}{l^2} \left(\frac{\sigma_1 u \sigma u}{\sigma_2 u \sigma_3 u} \right)^2 [3e_1 pu + e_1^2 + 2e_2 e_3]. \end{cases}$$

Dans cette formule, les fonctions elliptiques dépendent des quantités e_1, e_2, e_3 ainsi définies

$$(2) \quad \begin{cases} e_1 = 1 - 3 \frac{b^2 c^2}{\rho}; & e_2 = 1 - 3 \frac{a^2 c^2}{\rho}; & e_3 = 1 - 3 \frac{a^2 b^2}{\rho}; \\ \rho = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2. \end{cases}$$

a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde; enfin u est le plus petit argument réel et positif déterminé par la relation

$$(3) \quad 3 \frac{l^2 - R^2}{R^2} \frac{b^2 c^2}{\rho} = pu - 1.$$

On doit, pour appliquer la formule, supposer que la sphère est extérieure à l'ellipsoïde, c'est-à-dire $l > a$ et $R < l - a$.

Pour passer au cas du paraboloïde, on doit remplacer dans ces formules l par $l_0 + a$, b^2 par ap , c^2 par aq et faire tendre a vers

(1) *Journal de Mathématiques*, t. VI (4^e série), p. 288.

l'infini; l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ a pour limite le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0.$$

La formule (3) s'écrit

$$3 \frac{a^2 + 2al_0 + l_0^2 - R^2}{a(p+q) + pq} \frac{pq}{R^2} = pu - 1$$

et, par suite, u tend vers zéro lorsque a tend vers l'infini. On tire de là le développement de a en fonction de u sous la forme

$$a = \frac{2}{u^2} + \beta + \gamma u^2 + \dots;$$

si l'on porte cette valeur dans les relations (2), on obtient des développements analogues pour e_1, e_2, e_3 et ρ ; si enfin on remplace dans l'équation (1) les quantités a, e_1, e_2, e_3, ρ par ces développements, et si l'on développe les fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de u , on arrive à une expression de la forme

$$s = A + Bu + \dots,$$

qui, pour $u = 0$, se réduit à $s = A$. Il est inutile d'entrer dans le détail des calculs, qui n'offrent aucune difficulté; la formule finale est la suivante

$$(4) \quad s = 2\pi \frac{R}{p^{\frac{3}{2}} q^{\frac{3}{2}}} \left[2p^2 q^2 + 2l_0 pq(p+q) + \frac{R^2}{3} (3p^2 + 3q^2 + 2pq) \right].$$

Ainsi :

L'aire s comprise sur le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0$$

entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite au paraboloïde et à une sphère de rayon R , ayant son centre sur l'axe du paraboloïde à une distance l_0 du sommet, est exprimée, en fonction rationnelle de R et de l_0 , par la formule (4).

On doit supposer la sphère extérieure au paraboloïde, c'est-à-dire $l_0 > 0$ et $R < l_0$.

Vérification. — Si le paraboloïde est de révolution, l'aire s est comprise entre deux parallèles et peut se calculer directement. Considérons la parabole

$$y^2 + 2px = 0$$

et le cercle

$$(x - l_0)^2 + y^2 = R^2;$$

les tangentes communes à ces deux courbes touchent la parabole aux points dont les abscisses vérifient l'équation

$$(5) \quad px^2 + 2x(pl_0 + R^2) + p(l_0^2 - R^2) = 0.$$

Soient, par ordre de grandeur croissante, x_1 et x_2 les deux racines de cette équation; sur le paraboloïde engendré par la rotation de la parabole autour de Ox , l'aire comprise entre les deux parallèles $x = x_1$ et $x = x_2$ a pour expression

$$s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{p^2 - 2px},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi}{3p} \left[(p^2 - 2px_1)^{\frac{3}{2}} - (p^2 - 2px_2)^{\frac{3}{2}} \right];$$

chacun des radicaux du second membre devant être pris positivement. Or la relation (5) donne

$$(6) \quad p^2(x + l_0)^2 = R^2(p^2 - 2px);$$

d'ailleurs on vérifie que $-l_0$ est compris entre x_1 et x_2 et, par suite, on aura, en tenant compte de (6),

$$s = \frac{2\pi}{3p} \left[-\frac{p^2}{R^2}(x_1 + l_0)^2 - \frac{p^2}{R^2}(x_2 + l_0)^2 \right].$$

Ainsi s est une fonction symétrique entière de x_1 et x_2 ; le calcul se fait immédiatement et donne

$$s = \frac{2\pi p^2}{3R^3} (-12l_0pR^2 - 6R^4p^2 - 8R^6) \frac{1}{p^3},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi R}{p} \left[2p^2 + 4l_0p + \frac{8}{3}R^2 \right],$$

formule qui coïncide avec la formule (4) où l'on a fait $p = q$. On a ainsi vérifié la relation (4) et, par contre-coup, l'équation (1).

Sur les courbes de Lamé ; par M. R. GODEFROY.

Cette Note est relative aux rayons de courbure des courbes de Lamé et de leurs développées. J'ai déjà traité ce sujet [*Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, etc. (Journal de l'École Polytechnique, LXII^e Cahier)*]; mais je ne crois pas inutile d'y revenir, ces problèmes pouvant être résolus différemment, d'une manière un peu plus simple, et le résultat lui-même, dans le cas des développées, étant susceptible d'être présenté sous une forme nouvelle.

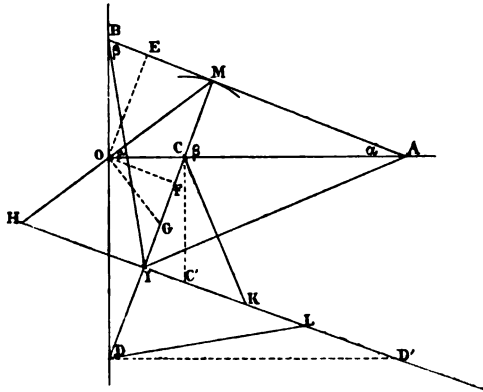
Rayon de courbure des courbes de Lamé. — Dans le Mémoire auquel il est fait allusion ci-dessus, le rayon de courbure des courbes de Lamé se déduit de l'expression du rayon de courbure de courbes plus générales : dans le cas spécial qui nous occupe, le procédé suivant conduit plus rapidement au résultat.

Prenons l'équation des courbes de Lamé (axes rectangulaires) sous la forme suivante .

$$ax^m + by^m + c = 0.$$

Soit $M(x, y)$ le point de la courbe (*fig. 1*) pour lequel on

Fig. 1.



cherche l'expression du rayon de courbure $MI = R$. Il est inutile d'insister sur les notations et éléments divers dont on fera usage, tout étant suffisamment indiqué sur la figure.

On a

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a} \frac{y^{m-1}}{x^{m-1}},$$

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{y}{x},$$

par suite

$$(1) \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-1} \mu.$$

C'est cette relation entre les coefficients angulaires de la normale et du rayon OM qui est notre point de départ.

Différentiant (1), on obtient

$$(2) \quad \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = (m-1) \frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-2} \mu \frac{d\mu}{\cos^2 \mu};$$

mais

$$\frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-2} \mu = \frac{\frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-1} \mu}{\operatorname{tang} \mu} = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \mu}.$$

Cette valeur permet d'écrire (2) sous la forme

$$\frac{d\beta}{\sin \beta \cos \beta} = (m-1) \frac{d\mu}{\sin \mu \cos \mu}$$

ou

$$(3) \quad \frac{d\mu}{d\beta} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin \mu \cos \mu}{\sin \beta \cos \beta}.$$

La perpendiculaire à OM au point O rencontrant la normale en G, on aura

$$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{R}{MG}.$$

On a de plus, dans les triangles OMA, OMB,

$$\frac{\sin \mu}{\cos \beta} = \frac{MA}{MO}, \quad \frac{\cos \mu}{\sin \beta} = \frac{MB}{MO}.$$

Ces valeurs étant portées dans (3), cette expression devient

$$(4) \quad R = \frac{1}{m-1} \frac{MA \cdot MB \cdot MG}{MO^2};$$

mais

$$\frac{OE}{MO} = \frac{MO}{MG}$$

ou

$$MO^2 = MG \cdot OE.$$

Portant dans (4) cette valeur de MO^2 , on a l'expression suivante du rayon de courbure

$$(5) \quad R = \frac{1}{m-1} \frac{MA \cdot MB}{OE},$$

forme obtenue par M. Fouret (*Comptes rendus*, 21 avril 1890).

Rayon de courbure des développées des courbes de Lamé.
— Ce problème est traité dans le Mémoire déjà cité, en partant directement de la formule qui précède. Ici nous commencerons par la mettre sous une forme un peu différente.

On a

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

ou

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD,$$

ce qui permet d'écrire (5) de la manière suivante

$$MI = \frac{1}{m-1} \frac{MC \cdot MD}{OE}.$$

C'est de cette expression que nous allons partir.

Soit $d\theta$ l'angle de contingence en M, on aura

$$(6) \quad \frac{\frac{dMI}{d\theta}}{MI} = \frac{\frac{dMC}{d\theta}}{MC} + \frac{\frac{dMD}{d\theta}}{MD} + \frac{\frac{dMF}{d\theta}}{MF}.$$

Les signes du deuxième membre sont ici ceux qui conviennent dans l'un des cas possibles de la figure. Il est bien entendu qu'il est indispensable, dans tous les cas, de prendre, avec des signes contraires, les segments croissant et décroissant (il est toujours aisé de les distinguer d'après la position des points où les normales menées à leurs extrémités rencontrent la normale à leur enveloppe).

Ceci posé, appelons R' le rayon de courbure de la développée au point I, et C', D', H, K, L les points où les perpendiculaires aux axes en C et D, la droite OM, et les perpendiculaires menées de C et D à IA et IB rencontrent la normale en I à la développée.

On a

$$\frac{dMI}{d\theta} = R'$$

et aussi

$$\frac{dMC}{d\theta} = IC', \quad \frac{dMD}{d\theta} = ID', \quad \frac{dMF}{d\theta} = OF.$$

Ces valeurs étant portées dans (6), la formule devient

$$(7) \quad \frac{R'}{MI} = \frac{IC'}{MC} + \frac{ID'}{MD} + \frac{OF}{MF};$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{IC'}{MC} &= \frac{IC}{MA} = \frac{IK}{MI}, \\ \frac{ID'}{MD} &= \frac{ID}{MB} = \frac{IL}{MI}, \\ \frac{OF}{MF} &= \frac{IH}{MI}. \end{aligned}$$

Portant ces expressions dans (7), on obtient

$$\frac{R'}{MI} = \frac{IK + IL + IH}{MI}$$

Où

$$R' = IK + IL + IH,$$

formule qui n'est vraie, dans tous les cas, que si l'on tient compte des prescriptions énoncées ci-dessus relativement aux signes des segments. Il serait plus juste d'écrire, en général, et à condition d'entendre comme il convient les doubles signes,

$$R' = \pm IK \pm IL \mp IH.$$

CAS PARTICULIER. — *Rayon de courbure de la développée de l'ellipse.* — Il est intéressant de déduire de ce qui précède l'expression du rayon de courbure de la développée de l'ellipse. Supposons menées de C et D les perpendiculaires à MI, qui rencontrent OM respectivement en N et P.

On sait, par une construction bien connue du centre de courbure de l'ellipse, que

$$CN = IC';$$

de même

$$DP = ID';$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{IC'}{MC} &= \frac{CN}{MC} = \frac{IH}{MI}, \\ \frac{ID'}{MD} &= \frac{DP}{MD} = \frac{IL}{MI}. \end{aligned}$$

On a, du reste,

$$\frac{OF}{MF} = \frac{IH}{MI};$$

la formule (7) devient alors

$$\frac{R'}{MI} = \frac{3IH}{MI}$$

ou simplement

$$R' = 3IH.$$

C'est la formule de Maclaurin.

Rayon de courbure de la développée de la développée de l'ellipse. — On sait (*loc. cit.*) comment on pourrait arriver à l'expression du rayon de courbure des développées des développées des courbes de Lamé. Cette recherche ne paraît pas devoir conduire, en général, à des résultats d'une interprétation commode. Le cas particulier de l'ellipse donne pourtant lieu à une construction extrêmement simple. C'est ce que nous allons montrer (¹).

On a

$$R' = 3IH;$$

mais

$$\frac{IH}{OF} = \frac{MI}{MF} = \frac{MI}{OE};$$

par suite

$$R' = \frac{3OF \cdot MI}{OE}.$$

On déduit de là

$$(8) \quad \frac{\frac{dR'}{d\theta}}{R'} = \frac{\frac{dOE}{d\theta}}{OE} + \frac{\frac{dMI}{d\theta}}{MI} \mp \frac{\frac{dOF}{d\theta}}{OF}.$$

Le signe — convient au cas où le point F se trouve entre les points M et I, le signe + au cas contraire.

Soit R'' le rayon de courbure de la deuxième développée, on a

$$\begin{aligned} \frac{dR'}{d\theta} &= R'', \\ \frac{dOE}{d\theta} &= OF, \quad \frac{dMI}{d\theta} = R', \quad \frac{dOF}{d\theta} = FI. \end{aligned}$$

(¹) Le lecteur est prié de refaire la figure, dans le cas de l'ellipse, en ne traçant, outre les axes, la tangente et les normales à l'ellipse et à sa développée, que les droites OM, OE, OF.

La formule (8) peut alors s'écrire

$$(9) \quad \frac{R''}{R'} = \frac{OF}{OE} + \frac{R'}{MI} \mp \frac{FI}{OF}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{R''}{R'} &= \frac{R'}{3IH}, \\ \frac{OF}{OE} &= \frac{OF}{FM} = \frac{IH}{MI}, \\ \frac{R'}{MI} &= \frac{3IH}{MI}. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (9), on obtient

$$(10) \quad \frac{R''}{3IH} = 4 \frac{IH}{MI} \mp \frac{FI}{OF}.$$

Menons de H une perpendiculaire à OM et une parallèle à OI. Soient P, Q les points où ces droites rencontrent la normale MI. On aura alors

$$\frac{IH}{MI} = \frac{IP}{IH}, \quad \frac{FI}{OF} = \frac{IQ}{IH}.$$

Moyennant ces valeurs, la formule (10) s'écrira

$$\frac{R''}{3IH} = 4 \frac{IP}{IH} \mp \frac{IQ}{IH}$$

ou

$$R'' = 12 IP - 3 IQ.$$

Prenons $IS = 4IP$, on a alors dans tous les cas

$$R'' = 3QS.$$

Le problème précédent a été résolu également par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, suppléments*) comme conséquence de la construction de la normale au lieu du point H, sommet du triangle HIM, pour lequel on connaît les normales aux courbes décrites par les deux autres sommets, et les points où les côtés touchent leurs enveloppes. La construction déduite de ces considérations est moins simple que celle qui vient d'être exposée.

*Sur les principes généraux de la Thermodynamique
et leur application aux corps élastiques;*

par M. GUSTAVE CELLÉRIER.

Les recherches suivantes ont pour but de déterminer les équations générales permettant d'introduire, dans l'étude des corps élastiques, les termes d'ordres supérieurs au premier par rapport aux grandeurs des déformations. Les premiers paragraphes sont consacrés à quelques théorèmes relatifs à l'emploi des principes thermiques, en vue de préciser le nombre et le choix des variables indépendantes, ainsi que de connaître avec certitude le degré de généralité que l'on doit attribuer aux équations thermiques.

Nous cherchons ensuite la valeur du travail infinitésimal dégagé par l'élément de volume d'un corps parfaitement élastique, quand il passe d'un état déjà déformé à un état infiniment voisin. Et, en appliquant à cette expression les considérations préliminaires, nous pourrions déterminer, pour cette famille de corps, la forme la plus générale de la fonction caractéristique, des valeurs des pressions, et par suite des équations de l'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène inégalement déformé en ses divers points, sans restriction aucune sur l'ordre de grandeur des déformations.

Comme exemple d'utilité possible de ces équations, nous citerons leur application éventuelle à la Chronométrie, science dont les progrès incessants exigent de jour en jour des moyens plus précis.

I. — PRINCIPES FONDAMENTAUX.

Principe de l'équivalence. — Appelons dQ la quantité de chaleur reçue par un corps pendant une modification infinitésimale de son état, dL le travail dégagé, et A la constante numérique de l'équivalent calorifique du travail; considérons, pour ce corps, un *cycle fermé*, c'est-à-dire une série de modifications successives à la fin desquelles le corps se retrouve identiquement dans l'état où il était primitivement; le principe de l'équivalence s'exprime analytiquement en écrivant

$$(1) \quad \int (dQ - A dL) = 0.$$

où l'intégrale est étendue à toutes les évolutions successives du cycle que nous venons de définir.

Cette équation n'existe d'ailleurs que si la chaleur et le travail sont seuls en présence.

Principe de l'énergie intérieure. — Ce principe est une conséquence du précédent, participant de la sorte à sa généralité, indépendamment de toute autre conception. L'existence de l'énergie intérieure résulte des deux théorèmes suivants :

1° *L'expression $dQ - A dL$ a pour terme principal un polynôme différentiel de la forme $Xdx + Ydy + Zdz + \dots + Rdr$, $x, y, z, \dots, r$ étant les variables indépendantes qui déterminent l'état du corps.*

En effet, nous pouvons poser, entre deux états voisins,

$$dQ - A dL = f(x, y, z, \dots, r, dx, dy, dz, \dots, dr),$$

f convergeant vers une fonction homogène du premier ordre en dx, dy , etc. Formons un cycle infinitésimal, à partir de l'état $x, y, \dots, r$, dans lequel la première modification porte sur toutes les variables, qui deviennent $x + dx, y + dy, \dots, r + dr$, tandis que chacune des modifications suivantes n'affecte qu'une seule des lettres en lui rendant sa valeur primitive; ce cycle sera fermé; les valeurs successives de f seront

$$\begin{aligned} &f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr), \\ &f(x + dx, y + dy, \dots, r + dr, -dx, 0, 0, \dots, 0), \\ &f(x, y + dy, \dots, r + dr, 0, -dy, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots, \\ &f(x, y, \dots, r + dr, 0, 0, \dots, -dr); \end{aligned}$$

et, en appliquant à ce cycle l'équation (1), négligeant les termes du deuxième ordre, on aura

$$\begin{aligned} f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr) + f(x, y, \dots, r, -dx, 0, \dots, 0) + \dots \\ + f(x, y, \dots, r, 0, 0, \dots, -dr) = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à la forme énoncée

$$f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr) = X dx + Y dy + \dots + R dr,$$

$X, Y, \dots, R$ désignant des fonctions finies des variables.

2° *Sous cette dernière forme, $dQ - A dL$ est la différen-*

tielle exacte d'une fonction de $x, y, \dots, r$, que l'on désignera par AU , U étant l'énergie intérieure du corps.

Il suffit de prouver que $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, car on démontrerait de même les relations analogues pour les autres lettres. Faisant donc varier x et y seuls, traçant les points dont les coordonnées sont x, y , leur lieu, pour un cycle fermé, est une aire fermée, que nous pouvons prendre de dimensions infinitésimales; soit un point intérieur fixe x_0, y_0 , et posons $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$; nous aurons, pour ce point de la courbe, en négligeant le troisième ordre,

$$X dx + Y dy = \left(X_0 + \frac{\partial X_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_0}{\partial y} \eta \right) d\xi + \left(Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial Y_0}{\partial y} \eta \right) d\eta,$$

dont l'intégrale, en application de l'équation (1), se réduit à

$$\frac{\partial X_0}{\partial y} \int \eta d\xi + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \int \xi d\eta = 0.$$

Or $\int \eta d\xi$, $\int \xi d\eta$ sont, de signes contraires, égaux à l'aire infinitésimale, qui n'est pas nécessairement nulle; il en résulte, pour le point x_0, y_0 , la relation qu'il fallait prouver

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Conformément à la désignation ci-dessus, nous écrirons donc

$$(2) \quad dQ = A(dU + dL)$$

où dU seul représente une différentielle.

Principe de Carnot. — Ce principe n'existe que dans les cas où l'on peut regarder comme *réversibles* les modifications thermiques d'un corps. Il fait survenir l'existence d'une fonction toujours croissante avec la température, quantité que l'on adopte pour exprimer la mesure T de la température. Sa démonstration est d'ailleurs faite sur des bases incontestables, indépendamment du nombre ou de la nature des variables indépendantes.

Le cycle de Carnot est parfois appelé *cycle parfait*, ou *cycle de rendement maximum*; et quand le principe d'un moteur thermique réalise ce cycle, on regarde la machine comme théoriquement parfaite. Telle est l'application d'un corollaire soit du principe de

Carnot, soit de la méthode même de sa démonstration, corollaire qui peut s'exprimer ainsi : *Si, pour un cycle réversible fermé, la température d'un corps est comprise entre les extrêmes T' et T'' , le rendement de ce cycle ne peut être supérieur au rapport $\frac{T'' - T'}{T'}$, le cycle étant parcouru dans le sens qui rend positif le travail résiduel.*

2. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX POUR LES CHANGEMENTS RÉVERSIBLES.

A. — *Pour des modifications réversibles, la quantité dQ a pour terme principal un polynôme différentiel linéaire, tel que $X dx + Y dy + \dots + R dr$; dL par suite a la même forme.*

Cette propriété résulte du corollaire énoncé ci-dessus, appliqué à un cycle infinitésimal; pour un tel cycle, ΣdQ représente le travail, tandis que la chaleur fournie au corps peut s'exprimer par $\Sigma dQ'$; on a alors $\frac{\Sigma dQ}{\Sigma dQ'} < \frac{T'' - T'}{T'}$; or, ici, $T'' - T'$ est infinitésimal du premier ordre, $\Sigma dQ'$ également, de sorte que ΣdQ ne peut être que du deuxième ordre au moins; en posant

$$dQ = f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr),$$

on démontrera, comme au n° 1, qu'aux termes près du deuxième ordre, dQ a la forme énoncée, et, à cause de l'équation (2), dL également.

B. — *L'expression $\frac{dQ}{T}$ est une différentielle exacte.*

D'après le théorème précédent, on a la forme

$$\frac{dQ}{T} = \frac{X dx + Y dy + \dots + R dr}{T}.$$

Concevons un cycle de Carnot où x et y varient seules; si T dépend de ces deux lettres ou de l'une d'entre elles, on peut démontrer le théorème comme dans le cas d'un fluide, où il n'y a que deux variables, et l'on a

$$\frac{\partial \left(\frac{X}{T} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{Y}{T} \right)}{\partial x}.$$

Si au contraire T est indépendant à la fois de x et y , pour tout cycle où $z, \dots, r$ restent constants, T ne varie pas; le rendement de ce cycle ne peut être supérieur à zéro, et par suite

$$\int (X dx + Y dy) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

et ce qui revient au même ici

$$\frac{\partial \left(\frac{X}{T} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{Y}{T} \right)}{\partial x}.$$

Ce résultat subsiste donc dans tous les cas, et l'ensemble des relations analogues en $z, \dots, r$ justifie l'énoncé du théorème.

Nous écrirons donc

$$(3) \quad dQ = \Lambda T d\omega, \quad dU + dL = T d\omega,$$

$d\omega$ étant la différentielle d'une fonction.

C. — Si le travail extérieur dL est exprimé par le polynôme $X dx + Y dy + \dots + R dr$, les lettres $x, y, z, \dots, r$ ne peuvent à elles seules déterminer l'état du corps.

En effet, la forme énoncée de dL résulte d'une forme primitive telle que $\Sigma P ds$, où les quantités P sont des projections de forces, et les quantités ds des arcs élémentaires décrits par les points de la surface du corps; si le corps ne subit aucune déformation, toutes les quantités ds sont nulles; et comme un des termes tels que $X dx$ provient du groupement d'un certain nombre de termes $P ds$, dx est nul dans le même cas, ainsi que $dy, dz, \dots, dr$. Dans l'hypothèse contraire à l'énoncé, dT serait nul aussi. Or on sait que l'on peut chauffer ou refroidir un corps sans qu'il subisse aucune déformation superficielle. Il existe donc d'autres variables indépendantes que $x, y, \dots, r$, pour déterminer soit la fonction T , soit l'état du corps.

D. — Si dL est exprimé par un polynôme de n termes, le nombre des variables peut être réduit à $n + 1$.

On posera

$$(4) \quad \omega T - U = \theta, \quad \text{d'où} \quad dL = d\theta - \omega dT,$$

θ étant une fonction dite *caractéristique*. Considérant $x, y, z, \dots, r, T$ comme variables indépendantes, et appelant $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les autres, cette nouvelle forme de dL conduit aux relations

$$(5) \quad X = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \dots, \quad R = \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial T}, \quad 0 = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \dots,$$

et l'on voit que θ , et par suite $\omega, X, \dots, R, U$ sont indépendants de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. On obtient donc le résultat proposé en considérant θ comme fonction de $x, y, z, \dots, r, T$.

E. — *Les quantités T, θ, ω, U ne peuvent dépendre que de variables représentées dans l'expression du travail extérieur.*

Si α est une variable non représentée dans dL , elle ne saurait être $x, y, \dots$ ou r ; c'est donc T qui pourrait en dépendre; mais de ce que $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0$, il résulte $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$, à cause des équations (5); cette lettre ne peut donc exister nulle part.

De ce théorème il est aisé de déduire le corollaire suivant :

Si l'expression de dL peut être ramenée à la forme $\mathcal{L} d\lambda + \mathcal{M} d\mu + \mathcal{N} d\nu + \dots + \mathcal{R} d\rho$, où $\lambda, \mu, \nu, \dots, \rho$ sont des fonctions de $x, y, \dots, r$, en nombre inférieur à celui de ces dernières variables, et où $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots, \mathcal{R}$ sont des fonctions de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \rho$, les quantités $\theta, \dots$ seront des fonctions de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \rho, T$, sans dépendre autrement de $x, y, z, \dots, r$.

D'après ce qui précède les équations thermiques peuvent s'écrire

$$(6) \quad dL = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial r} dr,$$

$$(7) \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial T}, \quad U = T \frac{\partial \theta}{\partial T} - \theta, \quad \theta = f(x, y, z, \dots, r, T),$$

$$(8) \quad dQ = AT \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial T} dx + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial T} dy + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial T} dr + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} dT \right).$$

Dans ce qui suit, nous conserverons aux seules lettres A, Q, L, U, T, θ leur signification actuelle.

3. — TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE POUR LES CORPS ÉLASTIQUES.

On peut fixer, au point de vue physique, l'état d'un corps en le comparant à un état initial déterminé. Soient donc x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point matériel dans cet état initial; la position actuelle du même point, que nous désignerons par x, y, z , peut être représentée par diverses équations entre x, y, z, x_0, y_0, z_0 et un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \dots$ indépendants de x_0, y_0, z_0 ; on pourra écrire

$$(9) \quad \begin{cases} x = F_1(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \dots), \\ y = F_2(x_0, y_0, \dots), \\ z = F_3(x_0, y_0, \dots). \end{cases}$$

Si le corps se déforme, ce sont les paramètres $\alpha, \beta, \dots$ qu'il faut faire varier dans ces équations, et non x_0, y_0, z_0 ; de sorte que les mouvements élémentaires des points sont exprimés par

$$(a) \quad \delta x = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \delta \beta + \dots \quad \text{ou} \quad \delta x = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots$$

Supposant donc x_0, y_0, z_0 éliminés entre ces six équations (9) et (a), l'on exprimera le résultat de cette élimination sous la forme

$$(b) \quad \delta x = f_1(x, y, z), \quad \delta y = f_2(x, y, z), \quad \delta z = f_3(x, y, z),$$

où les fonctions f_1, f_2, f_3 contiennent, outre x, y, z , les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma, \dots$

Il importe d'exprimer ici la valeur des dérivées de ces trois fonctions par rapport à x, y, z . Identifiant (a) et (b), on a

$$f_1 = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad f_2 = \sum \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots,$$

d'où, regardant x_0, y_0, z_0 comme fonctions de x, y, z ,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sum \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \delta \alpha,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial y_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial z_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_0} \right).$$

Nous représenterons les neuf dérivées des fonctions F_1, F_2, F_3

par les notations

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_x = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}, & \varphi_y = \frac{\partial F_1}{\partial y_0}, & \varphi_z = \frac{\partial F_1}{\partial z_0}, \\ \psi_x = \frac{\partial F_2}{\partial x_0}, & \psi_y = \frac{\partial F_2}{\partial y_0}, & \psi_z = \frac{\partial F_2}{\partial z_0}, \\ \gamma_x = \frac{\partial F_3}{\partial x_0}, & \gamma_y = \frac{\partial F_3}{\partial y_0}, & \gamma_z = \frac{\partial F_3}{\partial z_0}, \end{cases}$$

de sorte qu'on écrira

$$(c) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \delta \varphi_x + \frac{\partial y_0}{\partial x} \delta \varphi_y + \frac{\partial z_0}{\partial x} \delta \varphi_z.$$

Différentiant par rapport à x les équations (9), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \varphi_z \frac{\partial z_0}{\partial x}, \\ 0 &= \psi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \psi_z \frac{\partial z_0}{\partial x} = \gamma_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \gamma_z \frac{\partial z_0}{\partial x}; \end{aligned}$$

d'où, posant pour abréger

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta = \varphi_x \psi_y \gamma_z + \varphi_y \psi_z \gamma_x + \varphi_z \psi_x \gamma_y \\ \quad - \varphi_x \psi_z \gamma_y - \varphi_y \psi_x \gamma_z - \varphi_z \psi_y \gamma_x, \end{cases}$$

on tire

$$(12) \quad \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z}.$$

On obtient donc en définitive pour la valeur (c) et ses analogues

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \delta \varphi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \delta \varphi_z \right), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} \delta \varphi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} \delta \varphi_z \right), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \delta \psi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \delta \psi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \delta \psi_z \right), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

On peut remarquer que les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \dots, \gamma_z$ représentent les composantes de la dilatation du corps, de l'état initial à l'état actuel. Et si l'on désigne par v_0, v le volume spécifique pour ces deux états, on a tout d'abord

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial \Delta}{\partial x},$$

d'où, par intégration,

$$(14) \quad v = v_0 \Delta,$$

de sorte que Δ représente la dilatation en volume.

Considérons un élément de volume du corps, de poids ε , limité par une surface fermée ω . Soient x, y, z les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de ce volume; et $d\omega$ un élément superficiel dont les coordonnées actuelles sont $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$, et dont la normale extérieure fait avec les axes de coordonnées des angles de cosinus λ, μ, ν . En appelant $p_{\omega x}, p_{\omega y}, p_{\omega z}$ les composantes de la pression sur $d\omega$, une déformation infinitésimale développe sur cet élément superficiel un travail extérieur égal à

$$(d) \quad (p_{\omega x} \delta \xi + p_{\omega y} \delta \eta + p_{\omega z} \delta \zeta) d\omega.$$

L'intégrale de cette expression, étendue à toute la surface ω et divisée par ε , exprimera la valeur de dL , s'il n'y a pas d'autres forces extérieures.

On a du reste, ξ, η, ζ étant infinitésimaux,

$$\begin{aligned} \delta \xi &= f_1(x, y, z) + \xi \frac{\partial f_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dots \\ \delta \eta &= f_2 + \xi \frac{\partial f_2}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_2}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots, \\ \delta \zeta &= f_3 + \xi \frac{\partial f_3}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_3}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_3}{\partial z} + \dots \end{aligned}$$

et, désignant d'ailleurs par $p_{xx}, p_{xy} \dots, p_{zz}$ les composantes de la pression au point x, y, z , nous aurons encore

$$p_{\omega x} = \lambda(p_{xx} + dp_{xx}) + \mu(p_{xy} + dp_{xy}) + \nu(p_{xz} + dp_{xz}), \dots$$

en faisant

$$dp_{xx} = \xi \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} + \dots$$

La quantité dL à obtenir étant une limite se rapportant à l'unité de poids d'un corps qui serait constitué identiquement à l'élément infinitésimal situé au point x, y, z , cette quantité est de même ordre que f_1, f_2, f_3 et leurs dérivées. Comme du reste la valeur de ε , qui doit diviser l'intégrale de l'expression (d), est du troisième degré par rapport à ξ, η, ζ , il sera inutile de conserver, dans (d), les termes de degré supérieur au troisième. De la sorte,

on ne gardera, dans le terme $p_{\omega x} \delta \xi d\omega$, que l'expression

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\lambda p_{xx} + \mu p_{xy} + \nu p_{xz}) \left(f_1 + \xi \frac{\partial f_1}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) d\omega \\ & + (\lambda dp_{xx} + \mu dp_{xy} + \nu dp_{xz}) f_1 d\omega, \end{aligned} \right.$$

où dp_{xx} , ... seront remplacés par leurs termes du premier degré.

Pour l'évaluation d'intégrales telles que

$$(f) \quad \int \lambda d\omega, \quad \int \mu d\omega, \quad \int \lambda \xi d\omega, \quad \int \lambda \tau_1 d\omega, \quad \dots,$$

l'on décompose ω en menant une infinité de prismes parallèles à l'un des axes de coordonnées, Ox par exemple, ces prismes ayant des dimensions transversales très petites par rapport à celles de ω . L'un quelconque d'entre eux, de section $d\omega'$, rencontre la surface fermée ω en un nombre pair de points, où λ sera alternativement positif et négatif; comme, au signe près, en ces points, $\lambda d\omega$ vaut $d\omega'$, et que τ_1, ζ restent les mêmes, on a pour ces points

$$\Sigma \lambda d\omega = 0, \quad \Sigma \lambda \tau_1 d\omega = 0, \quad \Sigma \lambda \zeta d\omega = 0,$$

tandis que $\Sigma \lambda \xi d\omega$ est la partie du volume du prisme commune au volume ε . Il en résulte que les seules intégrales (f) qui ne soient pas nulles sont

$$\int \lambda \xi d\omega, \quad \int \mu \tau_1 d\omega, \quad \int \nu \zeta d\omega,$$

dont la valeur commune est égale au volume de l'élément, c'est-à-dire à εv , v étant le volume spécifique au point x, y, z .

On obtient alors, pour l'intégrale de l'expression (e)

$$(g) \quad \varepsilon v \left[p_{xx} \frac{\partial f_1}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial f_1}{\partial y} + p_{xz} \frac{\partial f_1}{\partial z} + f_1 \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) \right].$$

Or on sait que les pressions sont soumises aux équations

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = X, \\ & \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = Y, \\ & \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z, \end{aligned} \right.$$

où X, Y, Z représentent les forces étrangères, y compris l'inertie, rapportées à l'unité de volume.

De ces neuf équations, on peut tirer les valeurs des six quantités $p_{xx}, p_{xy}, \dots$, et il restera trois équations de condition entre les dérivées de θ et les neuf variables $\varphi_x, \dots, \chi_z$. Tenant compte des identités telles que

$$\varphi_x \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + \varphi_y \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \varphi_z \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} = \Delta, \quad \varphi_x \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} + \varphi_y \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} + \varphi_z \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} = 0, \quad \text{etc.},$$

on aura aisément

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2p_{xx} = \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z}, \\ 2p_{yy} = \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z}, \\ \dots\dots\dots, \\ 2p_{xy} = \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \\ \quad = \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

La double valeur de p_{xy} donne lieu à l'équation de condition

$$(20) \quad \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} - \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} - \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} - \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z} = 0,$$

et il est aisé de voir qu'elle est satisfaite par six valeurs particulières de θ , ayant pour types

$$\varphi_u^2 + \psi_u^2, \quad \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v,$$

et aussi bien par

$$\varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, \quad \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v.$$

forme permutable qui s'applique alors à l'ensemble des trois équations telles que (20). La forme la plus générale de θ est donc une fonction de T et des six quantités

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_x^2 + \psi_x^2 + \chi_x^2, \\ \psi = \varphi_y^2 + \psi_y^2 + \chi_y^2, \\ \chi = \varphi_z^2 + \psi_z^2 + \chi_z^2, \\ \varphi' = \varphi_y \varphi_z + \psi_y \psi_z + \chi_y \chi_z, \\ \psi' = \varphi_x \varphi_z + \psi_x \psi_z + \chi_x \chi_z, \\ \chi' = \varphi_x \varphi_y + \psi_x \psi_y + \chi_x \chi_y; \end{array} \right.$$

et l'on pourra écrire

$$(22) \quad dL = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \delta \psi + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \chi'} \delta \chi'.$$

Pour passer du premier système au second, on aura les formules de transformation telles que

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} = 2 \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_x'} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} = \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_x'} + 2 \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} = 2 \psi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \psi_y \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_x'} + \psi_z \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et inversement

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{2 \Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} + \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_x} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} + \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_y} \right) \\ = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial \theta}{\partial \psi_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} + \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_z} \right), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pour représenter géométriquement la déformation, on conçoit, dans l'état initial, une sphère infinitésimale qui devient un ellipsoïde dans l'état actuel; amplifiant leurs dimensions à une échelle telle que le rayon de la sphère soit représenté par l'unité de longueur, les trois rayons $M_0 A_0$, $M_0 B_0$, $M_0 C_0$ parallèles aux axes de coordonnées deviennent trois demi-diamètres conjugués MA, MB, MC de l'ellipsoïde, les points A, B, C ayant, relativement à M, des coordonnées

$$A: \varphi_x, \psi_x, \gamma_x; \quad B: \varphi_y, \psi_y, \gamma_y; \quad C: \varphi_z, \psi_z, \gamma_z;$$

de sorte que les six variables $\varphi, \psi, \dots, \gamma'$ dépendent des éléments du tétraèdre MABC

$$\varphi = \overline{MA}^2, \quad \psi = \overline{MB}^2, \quad \gamma = \overline{MC}^2, \quad \varphi' = \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cos \widehat{BMC}, \quad \dots$$

On peut tirer de là tous les angles du trièdre, et l'on trouve

$$\cos \widehat{BMC} = \frac{\varphi'}{\sqrt{\psi \gamma}}, \quad \sin \widehat{BMC} = \sqrt{\frac{\varphi_1}{\psi \gamma}},$$

où

$$\varphi_1 = \psi \gamma - \varphi'^2, \quad \dots,$$

et de même, pour le dièdre d'arête MA

$$\sin \widehat{MA} = \Delta \sqrt{\frac{\varphi}{\psi_1 \chi_1}}, \quad \frac{\sin \widehat{MA}}{\sin \widehat{BMC}} = \Delta \sqrt{\frac{\varphi \psi \chi}{\varphi_1 \psi_1 \chi_1}},$$

d'après l'identité

$$\Delta^2 = \varphi \psi \chi + 2 \varphi' \psi' \chi' - \varphi \varphi'^2 - \psi \psi'^2 - \chi \chi'^2.$$

Les axes de symétrie de l'ellipsoïde proviennent de trois diamètres rectangulaires de la sphère initiale. Soient ξ_0, η_0, ζ_0 les coordonnées du sommet de l'un de ces diamètres, prises relativement à M_0 ; ξ, η, ζ les valeurs actuelles de ces coordonnées relatives, pour le sommet correspondant de l'ellipsoïde; $\sqrt{\sigma}$ la longueur du demi-axe correspondant; on aura

$$\begin{aligned} \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 &= 1, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= \sigma, \\ \varphi \xi_0 + \chi' \eta_0 + \psi' \zeta_0 &= \sigma \xi_0, \\ \chi' \xi_0 + \psi \eta_0 + \varphi' \zeta_0 &= \sigma \eta_0, \\ \psi' \xi_0 + \varphi' \eta_0 + \chi \zeta_0 &= \sigma \zeta_0, \end{aligned}$$

et, posant

$$(25) \quad \begin{cases} \lambda = \varphi + \psi + \chi, \\ \mu = \psi \chi + \varphi \chi + \varphi \psi - \varphi'^2 - \psi'^2 - \chi'^2, \\ \nu = \varphi \psi \chi + 2 \varphi' \psi' \chi' - \varphi \varphi'^2 - \psi \psi'^2 - \chi \chi'^2, \end{cases}$$

les trois valeurs de σ résultent de l'équation

$$\sigma^3 - \lambda \sigma^2 + \mu \sigma - \nu = 0.$$

On a encore les relations

$$\begin{aligned} \xi \varphi_x + \eta \psi_x + \zeta \chi_x &= \sigma \xi_0, \\ \xi \varphi_y + \eta \psi_y + \zeta \chi_y &= \sigma \eta_0, \\ \xi \varphi_z + \eta \psi_z + \zeta \chi_z &= \sigma \zeta_0. \end{aligned}$$

On peut aussi donner une interprétation géométrique aux dérivées de la fonction caractéristique.

Les angles que fait le plan BMC avec les plans coordonnés ont pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\psi_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\chi_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi_x},$$

et, au moyen des équations (18), on trouve que

$$\frac{1}{2_0 \sqrt{\varphi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{1}{2_0 \sqrt{\psi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x}, \quad \frac{1}{2_0 \sqrt{\chi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \chi_x}$$

sont les composantes de la pression sur le plan BMC; désignant par P_u la force qui agit ainsi sur le parallélogramme BMC, on aura, pour ses composantes,

$$P_{ux} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x}, \quad P_{uy} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \psi_x}, \quad P_{uz} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_x},$$

et si v, w représentent les parallélogrammes CMA, AMB, on a de même

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} = v_0 P_{vy}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} = v_0 P_{vy}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_z} = v_0 P_{wz};$$

tandis qu'en décomposant les pressions normalement aux trois plans obliques, on obtient aisément

$$P_{uu} = \frac{\gamma \Delta}{v_0 \varphi_1} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad P_{uv} = \frac{\Delta}{v_0 \sqrt{\varphi_1 \psi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \quad P_{uw} = \frac{\Delta}{v_0 \sqrt{\varphi_1 \gamma_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \psi};$$

on retrouve ici $p_{uv} = p_{vu}$, ce qui existe d'ailleurs pour un système d'axes quelconques.

5. — ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

Quand les divers points d'un corps élastique sont soumis à des pressions, dilatations ou températures différentes, les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \dots, \gamma_z$ varient d'un point à l'autre. Toutefois, si le corps reste physiquement homogène, on doit regarder, pour tous les points, la fonction θ comme invariable de forme. Dans ce cas, les équations d'équilibre peuvent subir une transformation.

En général, si S est une fonction quelconque de x, y, z , on l'exprimera, au moyen des relations (12), en fonction de x_0, y_0, z_0 , par les identités telles que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial S}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial S}{\partial z_0} \right).$$

La première des équations (15) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta X = & \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} \frac{\partial p_{xy}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_x} \frac{\partial p_{xz}}{\partial x_0} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial p_{xx}}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} \frac{\partial p_{xy}}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_y} \frac{\partial p_{xz}}{\partial y_0} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{xx}}{\partial z_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} \frac{\partial p_{xy}}{\partial z_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_z} \frac{\partial p_{xz}}{\partial z_0} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans le premier membre Δ par $\frac{\psi}{\psi_0}$ et en tenant compte des équations (18), on obtient

$$\psi X = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \right) - \psi_0 (G p_{xx} + H p_{xy} + K p_{xz}),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \right), \\ H &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} \right), \\ K &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \chi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \chi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \chi_z} \right). \end{aligned}$$

Or, en substituant

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} = \psi_y \chi_z - \psi_z \chi_y, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} = \psi_z \chi_x - \psi_x \chi_z, \quad \text{etc.},$$

et en tenant compte des équations (10), il est aisé de voir que G, H, K sont identiquement nuls; de sorte que les équations d'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène seront les suivantes :

$$(26) \quad \begin{cases} \psi X = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \right), \\ \psi Y = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_z} \right), \\ \psi Z = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi_z} \right). \end{cases}$$

Dans ces équations, il faudrait, par exemple, remplacer le terme $\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right)$ par l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial T} \frac{\partial T}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \varphi_y} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \varphi_z} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_0 \partial z_0} \\ & + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_y} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_z} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_0 \partial z_0} \\ & + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \chi_x} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \chi_y} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \chi_z} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_0 \partial z_0}, \end{aligned}$$

le premier terme étant relatif au cas d'une température variable.

Si le corps est en mouvement, l'on remplacera de plus ψX , ψY ,

uZ respectivement par

$$\frac{1}{g} \left(R_x - \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} \right), \quad \frac{1}{g} \left(R_y - \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{1}{g} \left(R_z - \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} \right),$$

R_x, R_y, R_z étant les composantes de la résultante des forces extérieures agissant sur l'unité de masse, g la constante de la pesanteur, et t le temps.

Il faudrait encore introduire, dans les équations (26), les dérivées $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \dots$, au lieu de $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial z}$.

Les quantités $\frac{\partial T}{\partial x_0}, \frac{\partial T}{\partial y_0}, \frac{\partial T}{\partial z_0}$ dépendent de la manière dont la chaleur est distribuée à l'intérieur du corps. D'ailleurs l'équation (8) devient, pour le cas présent,

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} dQ &= AT \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right) \\ &= AT \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial T} \delta \varphi_x + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi_z \partial T} \delta \chi_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} \delta T \right) \\ &= AT \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial T} \delta \varphi + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi' \partial T} \delta \chi' + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} \delta T \right). \end{aligned} \right.$$

La quantité dQ comprend ici deux parties : l'une est la chaleur fournie ou soustraite aux divers points du corps par des causes extérieures; l'autre provient des phénomènes de conductibilité, par lesquels chaque élément du corps subit une action thermique des éléments avoisinants. Voici deux exemples de cas où l'on peut faire abstraction de la conductibilité.

Si les modifications du corps sont lentes et qu'il possède une température uniforme à chaque instant en tous ses points, les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x_0}, \frac{\partial T}{\partial y_0}, \frac{\partial T}{\partial z_0}$ sont nulles, et les termes qui en dépendent sont détruits dans les équations (26), qui se réduisent ainsi à un système de trois équations à trois inconnues F_1, F_2, F_3 .

Si, au contraire, le corps subit une déformation très rapide, pendant un temps assez court pour que la conductibilité puisse être négligeable, et que d'ailleurs cette déformation soit adiabatique en tous points, on aura $dQ = 0$, et par suite

$$\delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right) = 0.$$

Si donc au commencement de la déformation $\frac{\partial \theta}{\partial T}$ vaut h , h pouvant du reste varier d'un point à l'autre, de la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = h(x_0, y_0, z_0)$$

on devra tirer la valeur de T pour la substituer dans les équations (26).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} MARS 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Caronnet : *Sur les hélicoïdes et sur un quadrilatère dont les quatre côtés sont fonctions l'un de l'autre et engendrent des congruences de normales.*

M. d'Ocagne : *Sur les machines à calculer.*

M. Carvallo : *Sur un groupe de théorèmes de Géométrie et de Mécanique représentés par la règle de multiplication des polynômes.*

M. DEMOULIN fait la Communication suivante :

Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires.

L'équation dont il s'agit est la suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + f(z)(X_1 Y_1 + \dots + X_m Y_m),$$

où l'on représente par $f(z)$ une fonction quelconque de l'inconnue z , par $X_1, \dots, X_m$ des fonctions quelconques de x , par $Y_1, \dots, Y_m$ des fonctions quelconques de y .

L'intégrale générale de cette équation est donnée par la formule

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \int \lambda_1 dx + \int Y_1 dy + \dots + \int \lambda_m dx + \int Y_m dy + X + Y,$$

dans laquelle λ et Y désignent deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

SÉANCE DU 13 MARS 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Humbert : *Sur les courbes de genre deux, dont une intégrale abélienne de première espèce est elliptique.*

M. Demoulin : *Sur la correspondance par orthogonalité des éléments.*

M. Mangeot adresse une Note intitulée : *De quelques propriétés des cubiques planes et gauches.*

M. RAFFY présente la remarque suivante *Sur une équation d'Euler :*

Connaissant une solution z de l'équation

$$(x-y)z''_{xy} - mz'_x + mz'_y = 0,$$

on en obtient une autre en prenant

$$z_1 = x^{-m}y^{-m} \int x^m y^m \left(\frac{z'_x}{x} dx + \frac{z'_y}{y} dy \right).$$

En répétant cette transformation on trouvera des solutions nouvelles dépendant linéairement d'autant de constantes arbitraires que l'on voudra.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

De quelques propriétés des cubiques planes et gauches;

par M. S. MANGEOT.

Je considère une cubique plane, et soit ABC le triangle formé par trois droites quelconques parallèles aux trois asymptotes de la courbe. Si l'on prend ce triangle comme triangle de référence, l'équation de la courbe peut s'écrire sous la forme

$$xyz + \varphi = 0,$$

φ étant une fonction du second degré où figurent les trois paramètres qui fixent la position du triangle ABC par rapport au triangle des asymptotes. Il est possible de disposer de ces para-

mètres de manière à faire disparaître trois termes de la fonction φ . Parmi les formes auxquelles cette opération la ramène, j'indiquerai les trois suivantes :

$$l y z + m z x + n x y, \quad l x^2 + m y^2 + n z^2, \quad l x^2 + m y^2 + n,$$

qui peuvent être obtenues, respectivement, de 3, 12 et 4 manières, et dont l'interprétation conduit aisément à ces propositions :

Parmi tous les triangles formés par des parallèles aux asymptotes d'une cubique, ou, plus généralement, par trois droites contenant trois points de la courbe donnés en ligne droite, il y en a trois qui sont inscrits dans la cubique, et douze qui ont tous leurs côtés divisés harmoniquement par la courbe.

On peut inscrire dans la cubique quatre parallélogrammes dont les diagonales soient parallèles à deux asymptotes, choisies à volonté, et, plus généralement, quatre quadrilatères dont les diagonales passent par deux points donnés P, Q de la courbe et dont les côtés opposés se coupent en deux points situés sur la droite PQ.

Je me bornerai à indiquer les calculs qui réduisent la fonction φ à la première des trois formes écrites, quand on part de l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

Soient

$$x_1 y_1 z_1 + A x_1 + B y_1 + C z_1 = 0, \\ x_1 = \lambda, \quad y_1 = \mu, \quad z_1 = \nu$$

les équations de la cubique et des droites BC, CA, AB, et soit

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 = 2h$$

la relation constante qui a lieu entre les variables x_1, y_1, z_1 . Rapportée au triangle ABC, la courbe sera définie par l'équation

$$(x + \lambda)(y + \mu)(z + \nu) + A(x + \lambda) + B(y + \mu) + C(z + \nu) = 0,$$

qui, sous la condition identique

$$(\mu\nu + A)x + (\nu\lambda + B)y + (\lambda\mu + C)z + \lambda\mu\nu + A\lambda + B\mu + C\nu = 0,$$

prend la forme voulue, et devient

$$(1) \quad \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} + 1 = 0.$$

L'identité posée exige, pour être satisfaite, que l'on ait, entre les trois paramètres λ , μ , ν et une inconnue auxiliaire S les quatre relations

$$\mu\nu = \alpha S - A, \quad \nu\lambda = bS - B, \quad \lambda\mu = cS - C, \quad \lambda\mu\nu = hS$$

L'équation qui détermine S est dès lors

$$(\alpha S - A)(bS - B)(cS - C) = h^2 S^2,$$

et les valeurs de λ , μ , ν sont $\frac{hS}{\alpha S - A}$, $\frac{hS}{bS - B}$, $\frac{hS}{cS - C}$. Aux trois valeurs de S correspondent trois triangles inscrits dans la cubique.

La forme de l'équation (1) met en évidence des propriétés de la cubique que je vais faire connaître. Le triangle inscrit ABC , auquel la courbe est ici rapportée, et dont les côtés BC , CA , AB sont parallèles aux asymptotes B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 , est inscrit également dans la conique qui correspond à l'équation

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} = 0.$$

Les deux courbes se touchent aux trois sommets A , B , C . Les tangentes bc , ca , ab en ces points vont passer par les points p , q , r où la cubique coupe ses asymptotes, et leurs six autres points d'intersection avec ces asymptotes sont situés deux à deux sur trois droites parallèles à celles-ci et symétriques de celles-ci par rapport aux droites BC , CA , AB . Les trois points où ces mêmes tangentes bc , ca , ab rencontrent les droites BC , CA , AB appartiennent à une parallèle à la droite pqr , droite dont l'équation est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} + 1 = 0.$$

On voit encore que les droites Aa , Bb , Cc passent par les sommets A_1 , B_1 , C_1 du triangle des asymptotes, et enfin que celles de toutes les droites précédemment dénommées qui contiennent les sommets du triangle ABC forment trois faisceaux harmoniques autour de ces points.

Dans le cas où le triangle formé par les asymptotes se réduit à un point, on a cette propriété :

Quand les trois asymptotes d'une cubique passent par un même

point, leurs six points de rencontre avec un triangle inscrit dont les côtés leur soient parallèles, et leurs six points d'intersection (autres que ceux situés sur la courbe) avec les tangentes aux sommets de ce triangle, sont respectivement les sommets de deux hexagones homothétiques l'un de l'autre par rapport au point de concours des trois asymptotes, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Les résultats énoncés ci-dessus sont susceptibles d'une généralisation que met en évidence la projection conique de la cubique, et l'on peut formuler ce théorème :

Trois points p, q, r d'une cubique plane étant pris en ligne droite d'une manière quelconque, si, parmi les douze tangentes à la courbe issues de ces points, on en prend trois quelconques B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 dont les points de contact α, β, γ soient en ligne droite (ce qui est réalisable de seize manières), les neuf autres tangentes peuvent se partager en trois groupes de trois droites formant un triangle abc qui possède les propriétés suivantes, en désignant par A, B, C les points de contact de ses côtés bc, ca, ab .

Les tangentes bc, ca, ab rencontrent respectivement les droites BC, CA, AB en trois points situés sur une même droite, et celle-ci passe au point de concours des deux droites pqr et $\alpha\beta\gamma$. Les points communs aux deux triangles $abc, A_1B_1C_1$, et autres que p, q, r , étant joints deux à deux convenablement, donnent trois droites $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ qui contiennent les points α, β, γ . Les droites Aa, Bb, Cc concourent en un même point, en allant passer par les points A_1, B_1, C_1 . Toutes les droites précédemment désignées, autres que pqr , et dont le nombre est égal à 16, forment six faisceaux harmoniques autour des six points $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$.

Une extension de ce théorème aux cubiques gauches, déduite aussi de la méthode projective, donne lieu à cette proposition :

Soient α, β, γ trois points quelconques d'une cubique gauche; S un point quelconque du plan $\alpha\beta\gamma$; $SA_1B_1C_1$ le trièdre, de sommet S , dont les faces ont dans leurs plans les tangentes à la courbe aux points α, β, γ ; p, q, r les trois points,

autres que α, β, γ , où ces trois plans coupent la cubique. Parmi les trièdres que forment les plans tangents menés à la cubique par les droites Sp, Sq, Sr , il y en a trois, tels que $Sabc$, satisfaisant aux conditions suivantes, en appelant A, B, C les points de contact des plans Sbc, Sca, Sab :

Les plans des faces du trièdre $SABC$ passent par les points α, β, γ . Les arêtes des trois trièdres $SABC, SA_1B_1C_1, Sabc$ sont trois par trois dans un même plan, et ces trois plans se coupent suivant une même droite. Les trois droites d'intersection des deux trièdres $SABC, Sabc$, autres que SA, SB, SC , sont dans un même plan. Les deux trièdres $SA_1B_1C_1, Sabc$ ont six droites communes (autres que Sp, Sq, Sr) qui sont deux à deux dans trois plans passant par les points α, β, γ . Enfin, tous ceux des plans précédents, qui contiennent l'une ou l'autre des droites $S\alpha, S\beta, S\gamma, SA, SB, SC$, forment, autour de ces six droites, six faisceaux harmoniques.

A ce même théorème sur les cubiques planes correspond également une proposition concernant les cônes du troisième ordre. On voit facilement la modification qu'il faut apporter à l'énoncé du théorème pour obtenir celle-ci ; les points et les droites doivent être remplacés respectivement par des droites et des plans qui contiennent le sommet du cône ; les points et les tangentes de la cubique deviennent des génératrices et des plans tangents du cône.

Je terminerai par la remarque suivante, à laquelle conduit l'interprétation de l'équation (1) dans le cas général.

Une cubique, plane ou gauche, est le lieu d'un point tel que les rapports de trois constantes aux distances de ce point à trois plans fixes parallèles à une même droite (quelconque d'ailleurs) aient une somme égale à l'unité. Les trois plans fixes sont parallèles aux trois asymptotes de la courbe : les trois constantes sont les distances de ces asymptotes aux trois plans. Chacun des rapports est précédé d'un signe : dans le cas des figures réelles, c'est le signe $+$ ou bien le signe $-$ suivant que les deux distances qui figurent dans le rapport sont ou ne sont pas dirigées dans le même sens.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. D. André : *Sur les séquences des permutations circulaires.*

M. Raffy : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Humbert : *Évaluation de certaines aires sphériques et de certaines aires découpées sur le cylindre de révolution.*

M. V. SCHLEGEL adresse la Communication suivante :

*Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière,
relatif au centre des moyennes distances.*

Ce beau théorème ⁽¹⁾, curieux également par la généralité de son objet et la simplicité de sa forme, se démontre d'une manière assez élégante, sans coordonnées ni lignes auxiliaires, à l'aide d'une méthode que j'ai exposée dans mon Ouvrage *System der Raumlehre*, Leipzig, 1872 (t. I, p. 51). Cette méthode est au fond la même que j'ai appliquée (t. X, p. 220 de ce *Bulletin*) à un théorème de M. Laisant, cité aussi par M. de la Goupillière. En voici l'application.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les sommets d'un polygone quelconque. Alors le centre de gravité (M) de ces points est déterminé (selon les principes de M. Grassmann) par la formule

$$(1) \quad M = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}.$$

Soit en outre

$$(2) \quad AG = A'_{1+s,r} A_{1+s+1,r}$$

une diagonale joignant deux de ces sommets séparés l'un de l'autre par $r - 1$ sommets, et

$$(3) \quad B = P_s$$

(1) Voir page 5 du présent Volume.

le centre de gravité des sommets d'un polygone quelconque à p sommets, construit sur la diagonale AC.

Soit enfin

$$(4) \quad \widehat{BAC} = \frac{m}{2} \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{BCA} = \frac{n}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Alors on a la relation (voir *System der Raumlehre*, loc. cit.)

$$(5) \quad \frac{A-B}{C-A} = \frac{1-i^{-m}}{i^{-n}-i^{-m}},$$

où le rapport est déterminé non seulement par les longueurs, mais encore par les directions des deux segments $A-B$ et $C-A$.

En posant encore

$$(6) \quad \frac{i^n-1}{i^n-i^{-m}} = \alpha, \quad \frac{1-i^{-m}}{i^n-i^{-m}} = \beta,$$

on déduit de la formule (5) par le calcul ordinaire la formule suivante

$$(7) \quad B = \alpha A + \beta C,$$

ou, en ayant égard à (2) et (3),

$$(8) \quad P_s = \alpha A_{1+s} + \beta A_{1+(s+1)r}.$$

Substituons successivement à s les valeurs 0, 1, 2, ..., en remplaçant les indices qui surpassent la valeur n par le reste de leur division par n . Or les polygones construits sur les diverses diagonales étant tous semblables entre eux, il en est de même des triangles CAB; donc les valeurs de m , n , α , β sont les mêmes dans tous ces triangles. Par conséquent, en additionnant toutes les équations déduites de (8), nous aurons

$$(9) \quad \begin{cases} P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1} = \alpha(A_1 + A_{1+r} + A_{1+2r} + \dots + A_{n+1-r}) \\ \quad \quad \quad + \beta(A_{1+r} + A_{1+2r} + \dots + A_1). \end{cases}$$

Or les sommes contenues dans les deux parenthèses sont identiques; et comme en outre, d'après (6), on a

$$(10) \quad \alpha + \beta = 1,$$

on trouve

$$(11) \quad P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1} = A_1 + A_{1+r} + A_{1+2r} + \dots + A_{n+1-r}.$$

Le premier membre de cette relation représente à cause de la for-

mule (1) le centre des points $P_0, P_1, \dots$, multiplié par n , savoir le centre de tous les np sommets des polygones construits sur les diagonales du polygone donné. De même le second membre représente le centre des sommets de ce dernier polygone, multiplié par n ; et l'équation (11) exprime que ces centres coïncident.

Si la série des diagonales, rentrant sur elle-même, ne rencontre pas tous les sommets, le théorème vaut également pour l'ensemble de ces séries épuisant tous les sommets, comme pour chacune de ces séries. Enfin on peut remplacer, dans les équations précédentes, tous les points par leurs projections normales ou obliques (parallèles à une direction quelconque) faites sur une droite quelconque, ou par les distances mesurées entre chaque point et sa projection.

SÉANCE DU 19 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. DE COMBEROUSSE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. L. Gérard, présenté par MM. Demoulin et Raffy; M. de la Vallée Poussin, présenté par MM. Demoulin et d'Ocagne; M. le lieutenant-colonel Touche, présenté par MM. Félix Lucas et Humbert; M. Mathé, présenté par MM. Désiré André et Appell.

Communications :

M. Carvallo : *Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat.*

M. Autonne : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation du premier ordre.*

M. Biocne fait la Communication suivante :

Sur les normales des courbes.

J'ai déjà fait remarquer que les développables passant par une courbe peuvent être considérées comme des surfaces réglées ayant une courbure totale nulle tout le long de cette courbe, et que, par suite, on peut généraliser certaines propriétés en considérant des surfaces qui ont tout le long de la courbe une courbure fon-

tion de l'arc, les développables correspondant au cas où cette fonction serait identiquement nulle.

Si l'on étudie, à ce point de vue, les surfaces engendrées par des normales à une courbe (surfaces que j'appellerai *normalies*), on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME. — *Si deux normalies ont même courbure tout le long de leur directrice, elles se coupent sous un angle constant (c'est la propriété bien connue des normalies développables), ou bien elles admettent pour bissectrices des normalies développables.*

THÉORÈME. — *Si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.*

En particulier, si l'une est développable, l'autre l'est aussi, comme on le sait.

Si l'on considère les normalies engendrées par des droites faisant un angle constant avec la normale principale, ces normalies ont toutes, le long de la directrice, même courbure que la surface des normales principales et que celle des binormales. On sait que la valeur absolue de la courbure est pour ces surfaces le carré de la torsion de la directrice.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les involutions linéaires; par M. MAX GENTY.

1. Nous avons donné, l'année dernière (t. XX du *Bulletin*, p. 106), quelques théorèmes, connus pour la plupart, sur les involutions linéaires d'espèce quelconque, et nous nous sommes surtout attaché à ne faire dépendre ces propriétés géométriques que d'un seul lemme analytique, le principe de correspondance de Chasles.

Nous allons donner ici un théorème qui résout dans toute sa généralité le problème des points multiples d'une involution li-

néaire. Ce théorème conduit donc aux propositions que nous avons données précédemment, et qui n'en sont que des cas particuliers.

2. Soit une involution linéaire de degré n et d'espèce k , que nous représenterons, d'après la notation de M. Guccia, par I_n^k , et soient s nombres positifs $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_s$ inégaux deux à deux, satisfaisant à la condition unique

$$\sum_{i=1}^{i=s} k_i = k.$$

Le théorème que nous allons démontrer consiste en ce qu'il existe un nombre fini de groupes de l'involution donnée possédant s points multiples d'ordres respectifs $[k_{i+1}]_{i=1}^{i=s}$. Le nombre de ces groupes est égal à

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)(n - k)(n - k - 1) \dots (n - k - s + 1),$$

ou encore à

$$\prod_{i=1}^{i=s} (k_i + 1) \frac{(n - k)!}{(n - k - s)!}.$$

Nous désignerons, pour abréger, par $u_n^{k_1, k_2, \dots, k_s}$ le nombre cherché. Remarquons d'abord que le théorème a déjà été démontré dans les cas de $s = 1$, $s = 2$, $s = k$. Ce dernier cas, en particulier, correspond au théorème de M. Émile Weyr.

Ceci posé, tous les termes de l'involution I_n^k ayant, en un point donné A, un point multiple d'ordre k_s , appartiennent à une involution $I_{n-k_s}^{k-k_s}$; et il existe $u_n^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ groupes de cette involution possédant $s - 1$ points multiples d'ordres respectifs $[k_i + 1]_{i=1}^{i=s-1}$. En dehors de ces points multiples et du point A, tous ces groupes de I_n^k déterminent donc $(n - k - s + 1) u_n^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ points M qui correspondent au point A. Il faut déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M.

Or, le point M étant donné, les groupes de l'involution I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} , et il existe $u_{n-1}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ groupes de cette involution ayant s points multiples d'ordres respectivement égaux à $k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_{s-1} + 1, k_s$. Nous avons donc, d'après le principe de correspondance de

Chasles

$$u_n^{k_1, k_2, \dots, k_s} = (n - k - s + 1) u_{n-k_1}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} + u_{n-1}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}.$$

Par des raisonnements analogues, nous obtiendrons les égalités successives

$$\begin{aligned} u_{n-1}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} &= (n - k - s + 1) u_{n-k_2}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} + u_{n-2}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}, \\ u_{n-2}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} &= (n - k - s + 1) u_{n-k_3}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} + u_{n-3}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n-k_{s-1}}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} &= 2(n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc, par l'addition des relations précédentes,

$$u_n^{k_1, k_2, \dots, k_s} = (k_s + 1)(n - k - s + 1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}.$$

Nous avons ainsi ramené le calcul du nombre cherché à celui d'un nombre analogue, mais dont l'involution correspondante n'a plus que $s - 1$ points multiples au lieu de s . Par l'application répétée du procédé donné, nous obtiendrons donc bien la formule

$$u_n^{k_1, k_2, \dots, k_s} = \prod_{i=1}^{i=s} (k_i + 1) \frac{(n - k)!}{(n - k - s)!}.$$

Remarque. — Nous avons supposé jusqu'ici les quantités k_i inégales deux à deux. Si q de ces quantités devenaient égales, le nombre précédent devrait être divisé par $q!$

3. Nous voyons, d'après cela, qu'une involution linéaire quelconque I_n^k peut présenter, par rapport à ses points multiples, un grand nombre de formes différentes, et qu'il existe certaines involutions possédant depuis un point multiple jusqu'à k points doubles. Le calcul du nombre de ces formes nous ramène à une question d'Arithmétique qui n'est autre que la *partition des nombres*.

4. Pour démontrer l'utilité du théorème précédent, nous allons en donner une application géométrique.

Considérons une courbe unicursale C_n de degré n . Les sphères de l'espace déterminent sur cette courbe une involution I_{2n}^1 . Nous pouvons donc prendre, conformément au théorème précédent,

$$s = 2, \quad k_1 = k_2 = 2.$$

En tenant compte de la remarque faite à la suite du théorème, nous en déduirons

$$u_{\frac{1}{2}n}^2 = \frac{8}{2}(2n-4)(2n-5) = 9(n-2)(2n-5).$$

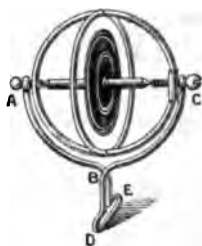
En particulier, si $n = 3$, le nombre précédent se réduit à 9. Nous obtenons donc sans calcul et très facilement la proposition géométrique suivante : *Toute cubique gauche possède 9 couples de cercles osculateurs situés sur une même sphère.*

Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat;

par M. E. CARVALLO.

1. *Description de l'appareil.* — Le pied équilibriste ABCDE (fig. 1) est formé d'un fil métallique de 1^{mm},5 de diamètre environ. Il se compose à peu près d'un demi-cercle vertical ABC muni, au bas, d'un appendice BDE qui a pour but de le faire re-

Fig. 1.



poser, sur le plan horizontal, par la partie DE qui est rectiligne et perpendiculaire au plan du cercle ABC. En A et C, le fil est doublement recourbé de façon à former deux coussinets qui reçoivent les extrémités de l'axe de la toupie gyroscopique. Dans cette position, le plan moyen du tore de la toupie passe par DE.

Si la toupie ne tourne pas, l'équilibre est instable, le tout bascule autour de DE. Mais si la toupie tourne sur elle-même avec une grande vitesse (environ 50 tours par seconde), le système semble être en équilibre stable. De là le nom de *pied équilibriste* donné par l'inventeur à ce jouet. En réalité, le pied exécute autour de la position apparente d'équilibre des oscillations manifes-

tées par un son qui, dans des conditions normales, n'est pas éloigné de l'octave inférieure du *la* des diapasons.

Tels sont les faits que nous allons expliquer par la théorie, en négligeant les frottements.

2. *Choix des données et des inconnues.* — Je compterai toutes les rotations positivement de droite à gauche. Les données sont (*fig. 2*) :

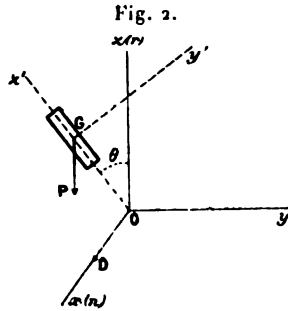
ω_0 , vitesse de rotation initiale de la toupie autour de son axe Gy' ;

θ_0 , angle initial que fait, avec la verticale Oz , la perpendiculaire

OG abaissée, du centre G de la toupie, sur l'axe DE ;

α , longueur de cette perpendiculaire OG ;

$A, B, C = A$, moments principaux d'inertie de la toupie, relatifs,



B à l'axe Gy' , A et C à deux droites Gx', Gz' perpendiculaires à Gy' ;

P , poids de la toupie.

Devant ce poids, je négligerai celui de la monture et du pied, ce qui simplifiera les écritures sans dénaturer les résultats.

Les inconnues sont :

ω , vitesse de rotation de la toupie relativement à sa monture;

$n = \frac{d\theta}{dt}$, vitesse de rotation du pied équilibriste autour de ED ;

r , vitesse de rotation du pied autour de la verticale Oz ;

v , vitesse vecteur du point O sur le plan horizontal.

3. *Mise en équations du problème.* — Les forces extérieures se réduisent au poids P appliqué en G . Pour déterminer les inconnues, nous appliquerons les principes suivants :

1° Théorème des quantités de mouvement projetées sur le plan horizontal ;

2° Équation d'Euler, pour l'axe Gy' de la toupie ;

3° Théorème du moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale du point G ;

4° Théorème des forces vives.

I. Le premier principe nous apprend que la projection horizontale du point G est fixe, ce qui détermine la vitesse v du point O en fonction des autres inconnues. Mais l'expérience (et, comme on va le voir, le calcul) montre que θ ne s'écarte jamais sensiblement de θ_0 . Il en résulte que le point O restera sensiblement fixe. Nous laisserons de côté ce mouvement qui est le plus fortement troublé par les frottements négligés.

II. *La rotation de la toupie autour de son axe Gy' se compose de deux parties : sa rotation relative ω , puis la rotation de la monture dont la composante suivant Gy' est $+r \sin \theta$.*

D'autre part, les moments d'inertie A et C sont égaux et, de plus, le moment de la force P, par rapport à Gy' , est nul. L'équation d'Euler, pour l'axe Gy' , est donc

$$B \frac{d}{dt} (\omega + r \sin \theta) = 0.$$

Cette équation s'intègre et donne

$$(1) \quad \omega + r \sin \theta = \omega_0.$$

III. *Le moment de la force P par rapport à la verticale étant constamment nul, le moment des quantités de mouvement est constant.* Or les rotations sont n , r et ω , et leurs composantes suivant les axes principaux d'inertie du point G sont

$$n, \quad p = \omega + r \sin \theta, \quad q = r \cos \theta.$$

Les moments principaux d'inertie sont donc, en remplaçant $\omega + r \sin \theta$ par sa valeur ω_0 ,

$$An, \quad B\omega_0, \quad Cr \cos \theta.$$

Le moment d'inertie par rapport à la verticale du point G sera, en remplaçant C par son égal A,

$$B\omega_0 \sin \theta + A r \cos^2 \theta.$$

En exprimant que ce moment est constant, il vient

$$B\omega_0(\sin\theta - \sin\theta_0) + Ar\cos^2\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad r = - \frac{B\omega_0(\sin\theta - \sin\theta_0)}{A\cos^2\theta}.$$

IV. *L'accroissement de force vive*, depuis l'état initial, est égal au travail de la pesanteur, savoir :

$$Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Cette force vive se compose de celle du point G, qui est ⁽¹⁾

$$\frac{P}{2g} a^2 n^2 \sin^2\theta,$$

et de celle des trois rotations

$$n, \quad p = \omega_0, \quad q = r\cos\theta.$$

La force vive de la rotation résultante est

$$\frac{1}{2} [An^2 + B\omega_0^2 + Cr^2\cos^2\theta].$$

L'accroissement de la force vive totale, depuis l'état initial, est donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} a^2 n^2 \sin^2\theta + An^2 + Cr^2\cos^2\theta \right),$$

et le théorème des forces vives donne, en remplaçant C par son égal A,

$$\left(\frac{P}{g} a^2 \sin^2\theta + A \right) n^2 + Ar^2\cos^2\theta = 2Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Si, dans cette équation, je remplace r par sa valeur (2), j'obtiens, pour déterminer n , la formule

$$(3) \quad n = \sqrt{\frac{2Pa(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \frac{B^2\omega_0^2}{A\cos^2\theta}(\sin\theta - \sin\theta_0)^2}{A + \frac{P}{g}a^2\sin^2\theta}}.$$

Les formules (1), (2), (3) résolvent le problème.

(¹) La projection horizontale du centre de gravité étant fixe, la vitesse se réduit à sa composante verticale.

4. *Conséquences de la formule (3).* — Elle montre que θ ne peut jamais différer de θ_0 que d'une quantité très petite; car, si l'on attribue à θ une valeur notablement différente de θ_0 , le second terme du numérateur devient prépondérant à cause de la grandeur du coefficient $\frac{B^2 \omega_0^2}{A}$ qui, pour la vitesse normale de 50 tours par seconde, vaut environ 7000 fois le coefficient $2Pa$. Il en résulterait pour n une valeur imaginaire, ce qui est inadmissible. On peut alors se rendre compte du mouvement ainsi : au début, n et r étant nuls, la pesanteur tend à augmenter θ ; $n = \frac{d\theta}{dt}$ prend donc des valeurs positives jusqu'à ce que θ atteigne la valeur θ_1 qui annule le radical. Alors θ ne peut plus augmenter. Il diminuera, n prendra des valeurs négatives jusqu'à ce que θ reprenne la valeur θ_0 , et ainsi de suite. La toupie oscillera donc entre l'azimut initial θ_0 et un azimut très voisin $\theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$.

5. *Intégration approchée des équations (2) et (3).* Ces prévisions conduisent à chercher des formules approchées en prenant pour inconnue (*)

$$\varepsilon = \theta - \theta_0,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon,$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \varepsilon \sin \theta_0 + \dots,$$

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0 + \dots$$

En portant ces valeurs dans la formule (3), on peut mettre celle-ci sous la forme

$$n = \pm \beta \sqrt{\alpha (\varepsilon \sin \theta_0 + \dots) - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 \theta_0 + \dots}{\cos^2 \theta}},$$

dans laquelle on a posé

$$\beta = \frac{B \omega_0}{\sqrt{A \left(A + \frac{P}{g} \alpha^2 \sin^2 \theta \right)}}, \quad \alpha = \frac{2PaA}{B^2 \omega_0^2}.$$

Cette formule met en évidence que la valeur ε_1 de ε , qui annule le radical, est du même ordre de petitesse que $\alpha \sin \theta_0$; et, d'après

(*) J'emprunte cette transformation au Cours de M. Resal à l'École Polytechnique.

ce que nous avons dit, α est environ $\frac{1}{7000}$. Si l'on borne à leurs premiers termes les développements suivant les puissances croissantes de ε , il vient

$$\varepsilon_1 = \alpha \sin \theta_0, \quad n = \frac{d\varepsilon}{dt} = \pm \beta \sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}.$$

Cette formule s'intègre facilement si l'on remarque que, θ variant peu, β peut être regardé comme constant. En déterminant la constante d'intégration de façon que ε soit nul à l'origine, on obtient

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} \cos \beta t = \varepsilon_1 \sin^2 \frac{\beta t}{2}.$$

D'après cela, θ oscille d'un mouvement pendulaire entre θ_0 et $\theta_0 + \varepsilon_1$. Sa valeur moyenne est $\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Voyons ce que devient la rotation r autour de Oz . Avec la même approximation, la formule (2) donne

$$r = - \frac{B \omega_0}{A \cos \theta_0} \varepsilon = \gamma \varepsilon,$$

où l'on a posé

$$\gamma = - \frac{B \omega_0}{A \cos \theta_0}.$$

En remplaçant r par $\frac{d\psi}{dt}$ et intégrant, on trouve

$$\psi = \gamma \int \varepsilon dt = \gamma \left(\frac{\varepsilon_1 t}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2\beta} \sin \beta t \right).$$

Ce mouvement angulaire se compose d'un terme uniforme et d'un terme périodique. La vitesse du mouvement uniforme est

$$\frac{\gamma \varepsilon_1}{2} = - \frac{B \omega_0}{A \cos \theta_0} \frac{P \alpha A \sin \theta_0}{B^2 \omega_0^2} = - \frac{P \alpha}{B \omega_0} \tan \theta_0.$$

Dans les conditions normales dont j'ai parlé, $\frac{P \alpha}{B \omega_0}$ a environ pour valeur 0,1. Quand le pied équilibriste est placé presque vertical, le second facteur $\tan \theta_0$ aussi est petit, de sorte que la vitesse de rotation $\frac{\gamma \varepsilon_1}{2}$ est faible. Si, par exemple, θ_0 est de 1° , cette rotation $\frac{\gamma \varepsilon_1}{2}$ sera de $0^{\circ},1$ par seconde. Elle sera inappréciable. Elle devient sensible pour des valeurs plus petites de ω_0 et des valeurs

plus grandes de θ_0 . Quant au terme périodique de ψ , il a même période que ε . La phase est seulement changée de $\frac{1}{4}$.

L'amplitude est sensiblement la même, parce que γ est presque égal à β .

6. *Conclusions.* — En résumé, le mouvement apparent est une rotation autour de la verticale. Cette rotation, insensible quand le pied est presque vertical, est accompagnée de deux vibrations, l'une autour de la verticale, l'autre autour de DE. Ce sont ces vibrations qui, par le jeu des forces centrifuges composées, maintiennent l'équilibre apparent.

On peut le vérifier expérimentalement en plaçant DE dans la rainure d'un parquet. La variation de l'angle ψ étant alors rendue impossible, le système bascule autour de DE.

Sur les groupes de Galois; par M. JOSEPH PEROTT.

Je n'ai nullement l'intention de donner une théorie complète de ces groupes qui ont fait l'objet de nombreux travaux : je me propose seulement de montrer comment il est possible d'engendrer chacun des trois groupes de Galois au moyen de trois opérations appartenant à l'exposant deux ou *réciroques*, comme les appelle Listing. Pour cela, j'aurai besoin de deux lemmes que je vais établir tout d'abord.

LEMME I. — *Deux opérations réciroques commutatives non identiques, faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe d'ordre quatre.*

En effet, soient a et b les deux opérations en question; toute opération exécutée à l'aide de a et b revient, en vertu de leur commutativité, à une puissance de a combinée avec une puissance de b . Or, en réduisant les exposants de ces puissances à leur moindre valeur positive (mod 2), on n'obtient que quatre expressions distinctes :

$$a^1 b^1, \quad a^1 b^2, \quad a^2 b^1, \quad a^2 b^2.$$

Comme ces quatre expressions donnent des résultats différents, — autrement les opérations a et b seraient identiques —, le lemme est démontré.

Ajoutons que, dans ce cas, ab appartient à l'exposant deux. Inversement, si a et b sont deux opérations réciproques faisant partie d'un groupe associatif et que ab appartienne à l'exposant deux, les opérations a et b sont commutatives. En effet, l'opération ba , qui est l'inverse de ab , est alors égale à ab .

LEMME II. — *Deux opérations réciproques non commutatives a et b , faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe dont l'ordre est le double de l'exposant toujours supérieur à deux auquel ab appartient.*

En effet, soit t l'exposant auquel ab appartient; on aura

$$b = a(ab), \quad ba = (ab)^{t-1}.$$

Les opérations a et b étant réciproques, il est inutile de les employer autrement qu'alternativement et, par suite, toute opération exécutée au moyen d'un nombre pair d'opérations a et b reviendra à une puissance de ab , puisque ba , comme on vient de le voir, est une puissance de ab . Une opération exécutée au moyen d'un nombre impair d'opérations a et b revient, soit à

$$a(ba)^u = a(ab)^{tu} \quad u,$$

soit à

$$b(ab)^v = a(ab)^{v+t-1}.$$

Cela étant ainsi, si l'on réduit les exposants de ab à leur moindre valeur positive (mod t), toute opération exécutée au moyen de a et de b reviendra soit à un terme de la suite

$$ab, (ab)^2, (ab)^3, \dots, (ab)^t,$$

soit à un terme de la suite

$$a(ab), a(ab)^2, a(ab)^3, \dots, a(ab)^t.$$

L'opération ab appartenant à l'exposant t , chaque suite n'aura que des termes différents entre eux. Disons plus : aucun terme de la seconde suite ne peut être égal à un terme de la première.

En effet, dans ce cas, on aurait

$$a(ab)^u = (ab)^v,$$

et, par suite, soit

$$a = (ab)^{v-u},$$

soit

$$a = (ab)^{v-u+t}$$

suivant que v est plus grand ou plus petit que u .

De sorte que tant a que b se réduiraient à des puissances de ab , ce qui entraînerait la commutativité

$$ab = ba,$$

contrairement à la supposition que les opérations a et b ne sont pas commutatives. L'ordre du sous-groupe engendré par a et b est donc bien $2t$.

I. — LE GROUPE DE GALOIS A 60 ÉLÉMENTS.

Pour ce groupe, le plus simple des trois, nous allons nous servir de considérations géométriques.

On sait que c'est Hamilton ⁽¹⁾ qui a eu le premier l'idée d'appliquer l'icosaèdre (ou le dodécaèdre) à l'étude du groupe qui nous occupe en ce moment.

Cela étant ainsi, chaque côté de direction donnée de la *fig.* 97 dans Lucas représente un élément du groupe de Galois à 60 éléments, et il y a lieu de considérer les opérations suivantes ⁽²⁾ (nous supprimons celles qui sont inutiles) :

1° L'opération ι qui *renverse* (ou retourne bout pour bout) une ligne de la figure.

2° L'opération λ qui change une ligne considérée comme un côté d'un pentagone en le côté suivant, en marchant toujours à *main droite*.

3° L'opération ω qui change une *arête* du dodécaèdre pentagonal en l'*arête opposée* de ce solide.

Hamilton montre que les opérations λ et ι , de périodes 5 et 2 respectivement, suffisent à elles seules pour engendrer le groupe.

J'introduis encore une opération χ qui consiste à changer une *arête* du dodécaèdre en l'*arête opposée*, à changer de direction et à faire un pas à droite comme pour l'opération λ , le tout considéré comme une seule et unique opération. L'opération χ sera réci-

⁽¹⁾ *Memorandum respecting a new System of Roots of Unity* (*Philosophical Magazine*, p. 416; 1856), trad. dans Lucas, *Récréations mathématiques*, vol. II, p. 326, où l'on trouvera aussi, à la page suivante, la traduction d'un autre extrait d'Hamilton sur le même sujet.

⁽²⁾ LUCAS, *Ouvrage cité*, page 137.

proque et, comme on aura

$$\lambda = \omega\chi,$$

il est clair que les trois opérations réciproques ι , χ et ω suffiront pour engendrer le groupe de Galois à elles seules.

II. — LE GROUPE DE GALOIS A 168 ÉLÉMENTS.

Ce groupe peut être défini à l'aide des permutations des quantités

$$\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

qu'on obtient en leur faisant subir toutes les transformations qui changent ω en

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{7},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers pris suivant le module 7 et satisfaisant à la congruence

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{7}.$$

Cela étant ainsi, je considère trois opérations réciproques du groupe

$$\varphi \equiv \frac{\omega + 4}{3\omega + 6}, \quad \chi \equiv \frac{4\omega + 1}{4\omega + 3}, \quad \psi \equiv \frac{6}{\omega} \pmod{7}.$$

Soit n l'ordre du sous-groupe engendré par les opérations φ , χ et ψ . On aura

$$\chi\psi \equiv \frac{3\omega + 4}{4\omega + 1} \pmod{7},$$

expression qui appartient à l'exposant 4 et, par conséquent, les opérations χ et ψ , à elles seules, engendreront un sous-groupe d'ordre 8 en vertu du lemme II.

Comme de plus

$$\varphi\chi \equiv \frac{1}{6\omega + 6} \pmod{7}$$

appartient à l'exposant trois et

$$\varphi\chi\psi \equiv \omega + 1 \pmod{7}$$

appartient à l'exposant sept, il faut bien que le nombre n soit un multiple de 8, de 3 et de 7. Or, comme ce même nombre n doit être un diviseur de 168, on aura $n = 168$, ce qui veut dire que les

opérations φ , χ et ψ engendreront à elles seules le groupe de Galois à 168 éléments.

III. — LE GROUPE DE GALOIS A 660 ÉLÉMENTS.

Ce groupe se définit d'une manière analogue, sauf que le nombre 11 prend la place du nombre 7. Il y a lieu, par conséquent, de considérer toutes les transformations qui changent ω en

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{11},$$

où α , β , γ , δ sont des nombres entiers pris suivant le module 11 et satisfaisant à la congruence

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{11}.$$

Cela étant ainsi, je considère les opérations réciproques

$$\varphi \equiv \frac{9\omega + 7}{4\omega + 2} \pmod{11},$$

$$\chi \equiv \frac{5\omega + 8}{5\omega + 6} \pmod{11},$$

$$\psi \equiv \frac{4}{8\omega} \pmod{11}.$$

On s'assure immédiatement que

$$\varphi\chi \equiv \frac{7}{3\omega + 3} \pmod{11}$$

appartient à l'exposant cinq; que

$$\varphi\psi \equiv \frac{5\omega + 8}{6\omega + 1}$$

appartient à l'exposant six; et enfin que

$$\varphi\chi\psi \equiv \omega + 1 \pmod{11}$$

appartient à l'exposant onze.

L'ordre du sous-groupe engendré par φ , χ et ψ , devant être en même temps un multiple de cinq, douze et onze et un diviseur de 660, sera égal au nombre 660 lui-même, ce qui prouve la proposition que nous avons en vue.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Touche : *Transformation des équations générales du mouvement des fluides.*

M. Tchebicheff : *Représentation approchée de $(a - x)^{-1}$ par des fonctions entières.*

M. Raffy : *Sur certaines équations différentielles du premier ordre qui s'intègrent par différentiation.*

M. D'OCAGNE, en présentant la nouvelle édition, revue et corrigée, de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, informe ses collègues que la Société mathématique d'Amsterdam vient de commencer la publication d'un nouveau recueil qui, sous le titre de *Revue semestrielle des publications mathématiques*, donne l'inventaire de tous les travaux mathématiques publiés dans le semestre écoulé, avec la classification admise pour le *Répertoire*, et, après le titre de chaque Mémoire, un résumé succinct rédigé en français, sauf pour les recueils anglais et allemands, qui sont analysés dans leur langue.

SÉANCE DU 15 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Laisant : *Expression des coefficients du binôme par des déterminants.*

M. Raffy : *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale s'obtient en remplaçant la dérivée par une constante.*

M. Humbert : *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux intégrales elliptiques.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques.

Les théories de l'électricité et du magnétisme reposent sur quatre formules élémentaires qui sont :

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses électriques ϵ et ϵ' ,

$$\varphi = h \frac{\epsilon \epsilon'}{r^2};$$

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses magnétiques μ et μ' ,

$$\varphi = k \frac{\mu \mu'}{r^2};$$

La formule d'Ampère, pour l'action mutuelle de deux éléments de courant $i ds$ et $i' ds'$,

$$\varphi = \alpha \frac{i i' ds ds'}{r^2} \left(\cos \epsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right);$$

La formule de Laplace, pour l'action mutuelle d'une masse magnétique μ et d'un élément de courant $i ds$,

$$\varphi = \lambda \frac{\mu i ds \sin \theta}{r^2}.$$

Les constantes h , k , α et λ sont des paramètres d'homogénéité. Désignons par L , M , T les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, par $F = LMT^{-2}$ l'unité symbolique de force, et par μ et ϵ les unités de masse magnétique et de masse électrique considérées comme deux nouvelles unités fondamentales. Nous aurons, en remarquant que, d'après la définition même de l'intensité d'un courant, cette intensité doit admettre l'unité dérivée ϵT^{-1} ,

$$(1) \quad \begin{cases} h = FL^2\mu^{-2}, & k = FL^2\epsilon^{-2}, \\ \alpha = FT^2\epsilon^{-2}, & \lambda = FLT\epsilon^{-1}\mu^{-1}. \end{cases}$$

En éliminant F entre ces quatre formules d'homogénéité, on trouve

$$(2) \quad \mu^2 \epsilon^{-2} = h k^{-1} = \alpha k^{-1} L^2 T^{-2} = \lambda^2 k^{-2} L^2 T^{-2}.$$

Les deux dernières égalités, envisagées séparément, donnent

$$(3) \quad h = \alpha L^2 T^{-2} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \alpha k.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 17 avril dernier, M. Mercadier a obtenu ces deux formules en supposant, comme on le fait généralement, que les masses magnétique et électrique μ et ν admettent toutes deux l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; on voit, par ce qui précède, que ces deux formules existent indépendamment de toute hypothèse sur la nature de μ et de ν . C'est en regardant h et k , coefficients concrets des formules de Coulomb, comme des coefficients purement numériques, que les électriciens ont été conduits à attribuer à μ et à ν l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; si l'on raisonnait de même sur la formule de l'attraction newtonienne des masses matérielles, on serait conduit à attribuer à la masse matérielle l'unité symbolique L^3T^{-2} , résultat évidemment inadmissible. En réalité rien n'autorise, dans l'état actuel de la science électrique et magnétique, à attribuer à μ et à ν des unités symboliques fonctions de L , M , T . L'expérience conduit seulement, en électromagnétisme, à regarder comme homogènes entre elles la puissance magnétique d'un feuillet qui, par définition, admet l'unité dérivée $L^{-1}\mu$ et l'intensité d'un courant dont l'unité dérivée est $T^{-1}\epsilon$. On peut, par conséquent, établir entre la masse magnétique μ et la masse électrique ϵ la corrélation

$$(4) \quad L^{-1}\mu = T^{-1}\epsilon,$$

qui assimile la masse magnétique au produit d'une masse électrique par une vitesse, soit, pour ainsi dire, à une quantité de mouvement électrique. Les formules (2) se réduisent alors à

$$(5) \quad hL^{-2}T^2 = k = \alpha = \lambda.$$

Une grandeur électrique ou magnétique quelconque admet alors une unité symbolique exprimable soit au moyen de μ , soit au moyen de ϵ , conjointement avec L , M , T ; de là les deux notations

$$L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}(L^{-1}\mu)^{\delta} \quad \text{et} \quad L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}(T^{-1}\epsilon)^{\delta},$$

dont le rapport

$$(6) \quad \left(\frac{L^{-1}\mu}{T^{-1}\epsilon} \right)^{\delta}$$

est purement numérique. Si l'on remplaçait μ par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électromagnétique*; de même si l'on

remplaçait ε par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électrostatique*; dans ces conditions le rapport (6) cesserait d'être abstrait et deviendrait une puissance de vitesse $(LT^{-1})^{-2}$. Tel est le motif pour lequel le rapport des unités symboliques électromagnétique et électrostatique d'une même grandeur est toujours une puissance de la vitesse LT^{-1} .

Ces considérations montrent qu'il faut actuellement, pour établir rationnellement les théories électriques et magnétiques, adjoindre aux unités fondamentales L , M , T de la Mécanique une quatrième unité fondamentale, soit, par exemple et de préférence, l'unité I d'intensité de courant ou de puissance magnétique. Si l'on remarque d'ailleurs que, dans les théories dont il s'agit, la masse matérielle M n'est jamais mise directement en cause, tandis qu'il en est tout autrement de l'*énergie*, dont l'unité symbolique est L^2MT^{-2} , on pressent qu'il serait avantageux de substituer l'unité d'énergie Θ à l'unité de masse. Toutes les grandeurs magnétiques et électriques ont des unités symboliques faciles à exprimer au moyen de L , T , I , Θ considérées comme unités fondamentales. Ce système rationnel conduit aux notations suivantes :

Masse magnétique ou quantité de magnétisme.....	LI
Masse électrique ou quantité d'électricité	TI
Force magnétique, intensité de champ magnétique	$L^{-2}I^{-1}\Theta$
Force électrique, intensité de champ électrique	$L^{-1}T^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel magnétique, force magnétomotrice	$L^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel électrique, force électromotrice.....	$T^{-1}I^{-1}\Theta$
Flux de force ou d'induction magnétique.....	$I^{-1}\Theta$
Flux de force électrique	$LT^{-1}I^{-1}\Theta$
Moment magnétique	L^2I
Intensité d'aimantation	$L^{-1}I$
Capacité électrique	$T^2I^2\Theta^{-1}$
Puissance magnétique, intensité de courant	I
Coefficients d'induction mutuelle et de self-induction .	$I^{-2}\Theta$
Réductance ou résistance magnétique	L^{-1}
Résistance électrique.....	$T^{-1}I^{-2}\Theta$

SÉANCE DU 7 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rôle du complexe linéaire en Statique et en Cinématique.*

M. d'Ocagne : *Étude de la convergence et de la sommation d'une classe particulière de séries.*

M. A. Chailan : *Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.*

SÉANCE DU 21 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Séliwanoff : *Sur l'équation du cinquième degré.*

M. Painlevé : *Sur le problème de Dirichlet.*

M. Kobb : *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables.*

M. d'Ocagne : *Sur une déformation de la sphère.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une classe nouvelle de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales.

Ossian Bonnet, dans l'*Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier), s'est proposé de trouver toutes les surfaces déformables sans altération des courbures principales. L'ensemble des surfaces qui admettent une infinité de déformations pareilles se compose : 1^o de certains cônes ; 2^o de toutes les surfaces à courbure moyenne constante ; 3^o d'une classe étendue de surfaces dont l'élément linéaire dépend de deux fonctions arbitraires ; 4^o de certaines surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

Voici comment sont définies les surfaces de la troisième classe. Désignant par X et Y deux fonctions arbitraires, l'une de x , l'autre de y , après avoir posé $u + iv = x$, $u - iv = y$; et représentant par ω le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec la courbe $u = \text{const.}$, l'illustre géomètre trouve

$$ds^2 = -(x+y)^2 \frac{X'Y' dx dy}{(X+Y)^2}, \quad e^{i\omega} = \frac{(Y-m)\sqrt{X'}}{(X+m)\sqrt{Y'}};$$

puis, ayant fait ressortir la généralité de ces surfaces, il passe à celles de la quatrième classe.

A raison du petit nombre des surfaces isothermiques connues jusqu'à ce jour, il y a lieu de signaler comme telles les surfaces d'Ossian Bonnet. Pour nous assurer du fait, rappelons que les deux systèmes de lignes de courbure ont respectivement pour équations différentielles

$$\frac{du}{dv} = \tan \frac{\omega}{2}, \quad \frac{du}{dv} = -\cot \frac{\omega}{2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$dx + e^{-i\omega} dy = 0, \quad dx - e^{-i\omega} dy = 0.$$

L'exponentielle étant remplacée par son expression, il vient

$$\frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy = 0, \quad \frac{\sqrt{X'}}{X+m} - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy = 0.$$

Si l'on désigne par α et β les paramètres des lignes de courbure et qu'on fasse

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy &= d\alpha, \\ \frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy &= d\beta, \end{aligned}$$

on trouvera immédiatement

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = \frac{4\sqrt{X'Y'}}{(X+m)(Y-m)} dx dy.$$

Ainsi, quelle que soit la constante m , le produit $dx dy$ est proportionnel à $d\alpha^2 - d\beta^2$, ce qui montre que les surfaces considérées ont leurs lignes de courbure isothermes et conservent cette propriété dans toutes les déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.

Relativement aux surfaces 4^e qui complètent la solution de son problème, Ossian Bonnet les signale bien comme étant applicables sur des surfaces de révolution et dit implicitement (*loc. cit.*, p. 85) que leurs courbures principales sont fonctions l'une de l'autre, mais il n'insiste pas sur ces deux propriétés remarquables et ne se préoccupe pas de savoir s'il a trouvé toutes les surfaces douées de l'une et de l'autre. D'une Note que j'ai publiée sur ce sujet dans ce Recueil (t. XIX, p. 158) il résulte que, si l'on fait abstraction des hélicoïdes et des surfaces à courbure totale constante, *toutes les surfaces applicables sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre admettent une infinité de déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.*

Au cours de recherches encore inédites sur les surfaces isothermiques dont les courbures principales sont liées par une relation, M. Caronnet a trouvé des surfaces applicables sur des surfaces de révolution et il a démontré que *toute surface applicable sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre est une surface isothermique.*

Il suit de là et de l'énoncé précédent que les surfaces de la quatrième classe d'Ossian Bonnet sont toutes isothermiques. Nous venons de voir qu'il en est ainsi des surfaces de la troisième classe, et l'on sait que tel est aussi le cas des cônes et des surfaces à courbure moyenne constante. On peut donc énoncer ce théorème, vrai sans aucune restriction : *Toute surface, qui admet une série de déformations n'altérant pas ses courbures principales, est une surface isothermique et conserve cette propriété dans toutes ces déformations.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Transformation des équations générales du mouvement des fluides; par M. TOUCHE.

Si nous considérons un élément ds de trajectoire fluide et si nous le projetons sur trois axes rectangulaires, nous obtenons les

trois équations bien connues du mouvement des fluides

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Appelons v , la vitesse suivant la trajectoire et $\alpha, \alpha', \alpha''$ les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire. Dans les équations (1) remplaçons u, v, w et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de $v, \alpha, \alpha', \alpha''$ et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par α , ceux de la deuxième par α' , ceux de la troisième par α'' et ajoutons membre à membre.

L'équation que l'on obtient ainsi a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dp}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dp}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}.$$

Au second membre figure la résultante U des forces extérieures suivant la trajectoire.

Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $-\frac{dv_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf, qui contiennent les dérivées des cosinus directeurs, ont une somme nulle; l'ensemble des neuf autres se réduit à $-v_1 \frac{dv_1}{ds}$. On arrive ainsi à l'équation

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - \frac{dv_1}{dt} - v_1 \frac{dv_1}{ds}.$$

Pour obtenir la deuxième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes rectangulaires, mais nous considérons, en ce même instant, un élément de la normale principale à la trajectoire, de longueur ds' égale à ds , et nous projetons ds' sur les trois axes. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A , les deux diagonales ds et ds' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx', dy', dz' .

Nous considérons d'abord le premier qui nous donne les équations connues du mouvement des fluides. Désignant ensuite par b, b', b'' les cosinus directeurs de la normale principale à la trajectoire, remplaçons dans les équations du mouvement u, v, w et leurs dérivées par rapport à x, y, z, t , par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par b , ceux de la deuxième par b' , ceux de la troisième par b'' et ajoutons membre à membre.

L'équation ainsi obtenue a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dp}{dy} \frac{dy'}{ds} + \frac{dp}{dz} \frac{dz'}{ds'} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}.$$

Au second membre figure la résultante U' des forces extérieures suivant la normale principale à la trajectoire.

Les termes en $\frac{dv_1}{dt}$ ont une somme nulle. Pour calculer les termes en v_1 , considérons l'élément de trajectoire $d\sigma$ qui passe au bout du temps dt par le point A, ainsi que l'élément de trajectoire ds qui passe par le même point A au commencement du temps dt . Projetons $d\sigma$ sur le plan osculateur de la trajectoire considérée au commencement du temps dt , appelons α_1 l'angle de cette projection avec l'élément ds et α_2 l'angle de l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan osculateur. Désignons enfin par c, c', c'' les cosinus directeurs de la binormale à la trajectoire. La considération de triangles sphériques nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} -bv_1 \frac{da}{dt} = b^2 v_1 \frac{dz_1}{dt} + bc v_1 \frac{dz_2}{dt}, \\ -b'v_1 \frac{da'}{dt} = b'^2 v_1 \frac{dz_1}{dt} + b'c' v_1 \frac{dz_2}{dt}, \\ -bv_1 \frac{da''}{dt} = b''^2 v_1 \frac{dz_1}{dt} + b''c'' v_1 \frac{dz_2}{dt}, \end{array} \right.$$

ce qui réduit l'ensemble des termes en v_1 à $v_1 \frac{dz_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf contiennent v_1^2 en facteur. Pour les calculer, portons à partir du point A une longueur ds sur la trajectoire; la tangente à la trajectoire qui part de l'extrémité de cet arc fait avec la tangente à la trajectoire en A un angle infiniment petit dz , et la Trigonométrie

sphérique donne

$$\begin{aligned} -bv_1 \frac{da}{ds} &= b^2 v_1^2 \frac{dx}{ds}, \\ -b'v_1 \frac{da'}{ds} &= b'^2 v_1^2 \frac{dx}{ds}, \\ -b''v_1 \frac{da''}{ds} &= b''^2 v_1^2 \frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

en sorte que les termes en v_1^2 ont pour somme $v_1^2 \frac{dx}{ds}$. Les neuf termes qui restent ont une somme nulle; il vient ainsi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U' + v_1 \frac{dx_1}{dt} + v_1^2 \frac{dx}{ds}.$$

Pour obtenir la troisième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes; mais nous considérons en ce même instant un élément de la binormale à la trajectoire, de longueur ds'' égale à ds et nous projetons ds'' sur les mêmes axes rectangulaires. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A, les deux diagonales ds et ds'' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx'', dy'', dz'' .

Le premier parallélépipède donne les équations du mouvement des fluides. Remplaçons encore u, v, w et leurs dérivées en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par c , ceux de la deuxième par c' , ceux de la troisième par c'' et ajoutons membre à membre.

La considération du second parallélépipède montre que le premier membre de l'équation ainsi obtenue équivaut à $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''}$. Au second membre figure la résultante U'' des forces extérieures suivant la binormale à la trajectoire. Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $v_1 \frac{dx_1}{dt}$.

Les dix-huit autres termes ont une somme nulle; d'où résulte l'équation

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''} = U'' + v_1 \frac{dx_1}{dt},$$

qui complète la transformation que nous avons en vue.

Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables ; par M. G. KOBB.

Dans mon Mémoire *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* ⁽¹⁾ j'ai démontré que le domaine d'un point quelconque (a, b, c) d'une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

peut être représenté par un certain nombre de développements de la forme

$$x - a = P_1(u, v), \quad y - b = P_2(u, v), \quad z - c = P_3(u, v).$$

Les variables auxiliaires u et v peuvent être choisies d'une infinité de manières, mais on a le théorème suivant : *Soient*

$$\begin{aligned} x - a &= P_1(u, v), & y - b &= P_2(u, v), & z - c &= P_3(u, v), \\ x - a &= P'_1(u', v'), & y - b &= P'_2(u', v'), & z - c &= P'_3(u', v') \end{aligned}$$

deux représentations de la même partie du domaine du point (a, b, c) telles qu'à un système de valeurs de x, y, z ne corresponde qu'un seul système de valeurs des variables auxiliaires ; les deux séries

$$P_i(u, v), \quad P'_i(u', v') \quad (i = 1, 2, 3)$$

commencent toujours par des termes du même ordre.

Pour abréger l'écriture, supposons que le point en question soit l'origine : on aura

$$(1) \quad \begin{cases} x = P_1(u, v) = (u, v)_{\lambda_1} + (u, v)_{\lambda_1+1} + \dots, \\ y = P_2(u, v) = (u, v)_{\lambda_2} + (u, v)_{\lambda_2+1} + \dots, \\ z = P_3(u, v) = (u, v)_{\lambda_3} + (u, v)_{\lambda_3+1} + \dots \end{cases}$$

et aussi

$$(2) \quad \begin{cases} x = P'_1(u', v') = (u', v')_{\lambda'_1} + (u', v')_{\lambda'_1+1} + \dots, \\ y = P'_2(u', v') = (u', v')_{\lambda'_2} + (u', v')_{\lambda'_2+1} + \dots, \\ z = P'_3(u', v') = (u', v')_{\lambda'_3} + (u', v')_{\lambda'_3+1} + \dots \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. IX.

Nous allons démontrer qu'on a

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2, \quad \lambda'_3 = \lambda_3.$$

Considérons les deux équations

$$x = P_1(u, v), \quad y = P_2(u, v)$$

et faisons la substitution

$$(3) \quad u = (\alpha_1 + \beta_1 v_1) u_1, \quad v = (\alpha_2 + \beta_2 v_1) u_1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x &= u_1^{\lambda_1} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \dots \right\}, \\ y &= u_1^{\lambda_2} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} = c_1, & (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} = c_2; \\ \frac{1}{\lambda_1 c_1} \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_1, \\ \frac{1}{\lambda_2 c_2} \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_2. \end{cases}$$

On trouve en extrayant les racines

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = u_1 (1 + c'_1 v_1 + \dots), \\ \left(\frac{y}{c_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = u_1 (1 + c'_2 v_1 + \dots). \end{cases}$$

Si les deux polynômes homogènes $(u, v)_{\lambda_1}$ et $(u, v)_{\lambda_2}$ ne sont pas identiquement égaux, on peut toujours supposer

$$c'_1 \geq c'_2.$$

Des formules (5) on déduit facilement

$$\left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2} \right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] = (c'_1 - c'_2) v_1 + C u_1 + \dots$$

Ensuite le système

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} &= u_1 + (u_1, v_1)_2 + \dots, \\ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] &= C u_1 + (c'_1 - c'_2) v_1 + (u_1, v_1)_2 + \dots \end{aligned}$$

nous donne

$$\begin{aligned} u_1 &= P_1 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}, \\ v_1 &= P_2 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

et, enfin, par (3) et (1),

$$(6) \quad z = P \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}.$$

Il est impossible que les indices de racines λ_1 et λ_2 se réduisent, parce que la formule doit nous donner exactement λ_1, λ_2 valeurs de z , d'après l'hypothèse faite sur la représentation du domaine du point en question.

Traisons maintenant de la même manière les équations (2) et posons

$$(7) \quad u' = (\alpha'_1 + \beta'_1 v'_1) u'_1, \quad v' = (\alpha'_2 + \beta'_2 v'_1) u'_1.$$

Si les deux polynômes homogènes $(u', v')_{\lambda'_1}$ et $(u', v')_{\lambda'_2}$ ne sont pas identiquement égaux, nous pouvons toujours déduire un développement

$$(8) \quad z = P' \left\{ \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}}, \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}} \left[\left(\frac{y}{c'_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda'_2}} - 1 \right] \right\}$$

où, en outre, on a

$$(9) \quad \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

ou bien

$$\frac{(\alpha'_1, \alpha'_2)_{\lambda'_1}}{(\alpha'_1, \alpha'_2)_{\lambda'_2}} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}.$$

La relation (9) ayant lieu, il existe certainement dans les domaines de convergence des séries (6) et (8) une partie commune. Mais, pour cette partie du domaine, les deux séries doivent être identiques, d'où résulte, en donnant d'abord à y une valeur arbitraire y_0 ,

$$\lambda'_1 = \lambda_1,$$

car alors les deux séries (6) et (8) représentent la même branche de la courbe

$$f(x, y_0, z) = 0.$$

De la même manière, on prouvera l'égalité $\lambda'_2 = \lambda_2$.

Supposons maintenant que le cas d'exception

$$(u', v')_{\lambda'_1} \equiv (u', v')_{\lambda'_2}$$

se présente et soit, par conséquent,

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} x &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots, \\ y &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots \end{aligned}$$

Mais alors considérons le système

$$\begin{aligned} x &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots \\ x - y &= (u', v')_{\lambda'+k} + (u', v')_{\lambda'+k+1} + \dots \quad (k \geq 1), \end{aligned}$$

d'où nous déduisons par (2)

$$(10) \quad z = P' \left\{ \left(\frac{x}{c'_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \left(\frac{x}{c'_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1}} \left[\left(\frac{x-y}{c'_2} \right)^{-\frac{1}{\mu_k}} - 1 \right] \right\},$$

avec

$$m_1 \mu_1 = \lambda', \quad m_k \mu_k = \lambda' + k,$$

m_1 et m_k étant des nombres entiers. Ici, au contraire, une réduction des indices λ' et $\lambda' + k$ est nécessaire pour que la formule (10) ne nous donne pas trop de valeurs de z .

Nous allons voir que les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques.

En effet, s'il en est ainsi, nous aurons d'abord

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_k;$$

mais, en même temps, en donnant à γ la valeur γ_0 , nous aurons

$$\lambda_1 = \mu_1 \mu_k,$$

et ensuite, en fixant la valeur de x ,

$$\lambda_2 = \mu_k,$$

d'où résulte

$$\lambda_2 = \mu_k = 1.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur la représentation par les séries (2),

$$\lambda'^2 = \mu_1 \mu_k = \lambda_1 \lambda_2,$$

ou bien

$$\mu_1 = \lambda'^2,$$

ce qui est impossible, sauf pour $\lambda' = 1$. Ainsi, les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques. Par conséquent, si le cas d'exception se présente pour les séries (2), il doit se présenter aussi pour les séries (1). Mais alors, comme on a, à la fois,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda'_1 \lambda'_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda',$$

il en résulte bien

$$\lambda = \lambda'.$$

Ainsi nous avons démontré, dans tous les cas, les égalités

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \quad \lambda_2 = \lambda'_2.$$

Nous démontrerions exactement de la même manière l'égalité

$$\lambda_3 = \lambda'_3.$$

Le théorème énoncé est donc complètement établi.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Charliat, présenté par MM. Chailan et D. André; M. Painlevé, présenté par MM. d'Ocagne et Humbert; M. Michel, présenté par MM. d'Ocagne et Picquet; M. Adam, présenté par MM. Antomari et Caronnet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur les équations représentables par trois systèmes réguliers de points isoplèthes.*

M. Caronnet : *Sur les hélicoïdes.*

M. Humbert : *Involutions sur les courbes algébriques.*

M. CHAILAN (1) fait la Communication suivante :

Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un système à liaisons complètes admet une position d'équilibre instable, s'il y a une fonction des forces, le système ne peut se fixer dans cette position au bout d'un temps fini.*

Considérons la trajectoire d'un point quelconque du système; la position de ce point sur sa trajectoire est définie par l'arc parcouru s . Les coordonnées de tous les points du système sont des fonctions connues de s , puisque le système est à liaisons complètes; la fonction des forces peut se mettre sous la forme $U(s)$, et la demi-force vive du système peut s'écrire $\varphi(s) \frac{ds^2}{dt^2}$, $\varphi(s)$ étant une fonction essentiellement positive, car elle est une somme de carrés.

Prenons pour origine des arcs le point de la trajectoire qui correspond à la position d'équilibre, supposons qu'entre la position initiale et cette position d'équilibre il n'y ait pas d'autre position

(1) Annexe au compte rendu de la séance du 7 juin.

d'équilibre instable, et lançons le système de façon que s décroisse.

Le théorème des forces vives donne

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = U(s) - U(o),$$

$$dt = - \frac{\sqrt{\varphi(s)} ds}{\sqrt{U(s) - U(o)}}.$$

Le temps que mettrait le mobile pour atteindre la position d'équilibre est donc

$$t = - \int_{s_0}^0 \frac{\sqrt{\varphi(s)} ds}{\sqrt{U(s) - U(o)}}.$$

Développons $U(s)$ par la formule de Maclaurin

$$U(s) = U(o) + \frac{s}{1} U'(o) + \frac{s^2}{2!} U''(o) + \dots$$

Par hypothèse, $U'(o)$ est nul ; par suite, on a

$$U(s) - U(o) = s^{n+2} \psi(s) \quad (n \geq 0),$$

la fonction $\psi(s)$ étant essentiellement positive dans l'intervalle de 0 à s_0 . Donc

$$t = - \int_{s_0}^0 \sqrt{\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}} \frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Cette intégrale est infinie puisque

$$\int_0^1 \frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}$$

croît sans limite, n étant supérieur ou égal à zéro.

Remarque I. — Le théorème ne serait pas applicable si, dans le voisinage de la position d'équilibre, la fonction U n'était pas développable par la formule de Maclaurin.

Par exemple, prenons un système pesant :

$$U = mgz, \quad \frac{dU}{ds} = mg \frac{dz}{ds}, \quad \frac{d^2 U}{ds^2} = mg \frac{d^2 z}{ds^2}, \quad \text{etc. ;}$$

si la courbe décrite par le point d'ordonnée z présente à l'origine un point de rebroussement, la tangente en ce point étant par hypothèse horizontale, la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2}$$

donne

$$\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_0 = x.$$

Dans ce cas, le temps est fini ⁽¹⁾.

Remarque II. — Pour faire le développement, il est inutile de calculer U en fonction de s. En effet, si U est exprimé à l'aide d'un paramètre p, nous savons toujours calculer $\frac{dp}{ds}$, et la formule

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dp} \frac{dp}{ds}$$

permet d'obtenir toutes les dérivées de U par rapport à s.

M. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloidé de révolution.

Soient S et S' deux surfaces polaires réciproques par rapport au paraboloidé de révolution

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

A un point quelconque M de S correspond sur S' un point M', pôle du plan tangent en M par rapport au paraboloidé. Les courbures totales $\frac{1}{R_1 R_2}$ et $\frac{1}{R'_1 R'_2}$ des surfaces S et S' aux points M et M' ont entre elles une relation très simple :

Par les points M et M' menons, parallèlement à l'axe du paraboloidé, deux droites rencontrant cette surface aux points A et A'. Cela posé, F étant le foyer commun à toutes les sections méridiennes, on a

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 = 16 \overline{FA}^2 \overline{FA'}^2.$$

Pour démontrer cette formule, appelons x, y, z, p, q, r, s, t les coordonnées du point M et les dérivées des deux premiers ordres de z par rapport à x et à y; soient x', y', z', p', q', r', s', t' les éléments analogues relatifs au point M'. Entre ces quantités exis-

(¹) DESPEYROUS, *Mécanique*, t. I, p. 286. — APPELL, *Cours de Mécanique*, t. I, p. 216.

tent les relations suivantes, bien connues en Analyse (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = p, & y' = q, \\ x = p', & y = q', \\ (rt - s^2)(r't' - s'^2) = 1. \end{cases}$$

On a, d'autre part,

$$R_1 R_2 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2},$$

$$R'_1 R'_2 = \frac{(1 + p'^2 + q'^2)^2}{r't' - s'^2};$$

multipliant ces égalités et tenant compte des relations (1), on trouve

$$(2) \quad R_1 R_2 R'_1 R'_2 = (1 + x^2 + y^2)^2 (1 + x'^2 + y'^2)^2.$$

Soient P la projection orthogonale du point A sur l'axe de révolution OZ et N le point d'intersection de cet axe avec la normale en A au parabolöide. De la forme choisie pour l'équation du parabolöide il résulte que $PN = 1$; on a donc

$$1 + x^2 + y^2 = \overline{AN}^2 = 2FA,$$

et de même

$$1 + x'^2 + y'^2 = 2FA'.$$

Ces deux relations, jointes à l'égalité (2), donnent la formule annoncée.

SÉANCE DU 19 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. F. Lucas : *Propriétés d'un système de points dans un plan.*

M. D. André : *Propriétés d'un système de points dans l'espace.*

M. Laisant : *Sur l'attraction proportionnelle à la distance et sur les forces constantes.*

M. Humbert : *Courbes tracées sur la surface des ondes.*

(1) Voir par exemple, CAMILLE JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 357.

M. d'OCAGNE fait la Communication suivante :

Remarque sur la déformation des surfaces de révolution.

Soient S et S' deux surfaces de révolution dont C et C' sont les courbes méridiennes, d et d' les axes. A partir d'origines fixes A et A' , prises sur C et C' , portons des arcs égaux AM et $A'M'$ et menons à ces courbes, en M et en M' , leurs tangentes qui coupent d et d' respectivement en μ et en μ' . On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces S et S' soient applicables l'une sur l'autre est que, quelle que soit la longueur des arcs égaux AM et $A'M'$, les tangentes $M\mu$ et $M'\mu'$ soient égales.

On peut déduire de là un mode de génération très simple pour les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée.

On a, en effet, le théorème suivant, qui ne semble pas encore avoir été remarqué :

Soient C une section faite dans un cylindre quelconque Γ par un plan P , d l'intersection du plan P par un plan p perpendiculaire aux génératrices de Γ et qui coupe lui-même ce cylindre suivant la courbe c . Lorsqu'on développe le cylindre Γ sur un plan, la courbe C se transforme en C' et la courbe c en une droite d' . Cela posé, on a cette proposition :

La surface de révolution S engendrée par la rotation de la courbe C autour de la droite d et la surface de révolution S' engendrée par la rotation de la courbe C' autour de la droite d' sont applicables l'une sur l'autre.

En effet, si M et m sont des points de C et de c se correspondant sur une même génératrice de Γ , les tangentes à ces courbes en ces points se coupent en μ sur la droite d . Pendant le développement, le point μ vient en μ' sur la droite d' . D'autre part, l'angle $mM\mu$ et le segment Mm restant invariables, le triangle $Mm\mu$ ne subit aucune déformation et, par suite, $M'\mu' = M\mu$; enfin, dans le développement, l'arc AM conserve sa longueur; donc $\text{arc } A'M' = \text{arc } AM$.

Par conséquent, les courbes C et C' liées respectivement aux droites d et d' offrent bien le caractère rappelé plus haut pour que les surfaces de révolution S et S' qu'elles engendrent en tournant autour de ces droites soient applicables l'une sur l'autre.

On voit comment, par application de ce théorème, on pourra engendrer les méridiennes de surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution S donnée.

Par la méridienne C de S , on fera passer un cylindre dont les génératrices, inclinées d'un angle quelconque sur le plan de C , soient à angle droit sur l'axe d de S , puis on développera ce cylindre sur un plan et la courbe C donnera ainsi naissance à C' (*).

Si la courbe C coupe d en deux points A et B et si ces points, dans le développement, viennent en A' et en B' , l'axe d' est donné par la droite $A'B'$.

Si C ne coupe pas d , on choisit deux points quelconques A et B sur C ; les tangentes en ces points coupant d en α et en β , on porte sur les tangentes à C' , menées par les points correspondants A' et B' , les segments $A'\alpha' = A\alpha$ et $B'\beta' = B\beta$. L'axe d' est alors donné par la droite $\alpha'\beta'$.

Il faut encore remarquer que lorsqu'on fait varier le plan p de l'énoncé précédent, c'est-à-dire lorsque l'axe d se déplace par rapport à la courbe C en conservant une direction fixe, la courbe C' reste la même, mais que l'axe d' se déplace également par rapport à C' en conservant la même direction.

Si, en particulier, on suppose que la courbe C soit un cercle, on obtient cette proposition :

Si la courbe C' , en tournant autour de d' située dans son plan, engendre une surface applicable sur la sphère, cette courbe, en tournant autour de toute droite parallèle à d' et aussi située dans son plan, engendrera une surface applicable sur un tore.

(*) On peut déduire de là un moyen de tracer pratiquement la méridienne C' connaissant la méridienne C . Supposons, en effet, qu'on ait découpé dans un plan rigide et mince un gabarit limité d'une part à la courbe C , de l'autre à l'axe d . Plaçant le bord d de ce gabarit sur une table plane T , donnons à ce gabarit une inclinaison quelconque sur la table T ; puis, après l'avoir fixé dans cette situation, appliquons contre son bord curviligne C une feuille de papier un peu fort, appuyée par son bord inférieur sur la table T . Nous n'aurons qu'à marquer sur la feuille de papier la trace du bord C , puis à étendre cette feuille sur un plan pour que cette trace donne la courbe C' qui, en tournant autour de la droite d' , représentée par le bord inférieur du papier, engendre une surface S' applicable sur S . On obtient différentes surfaces S' en faisant varier l'angle du gabarit avec la table T .

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs; par M. G. ARNOUX.

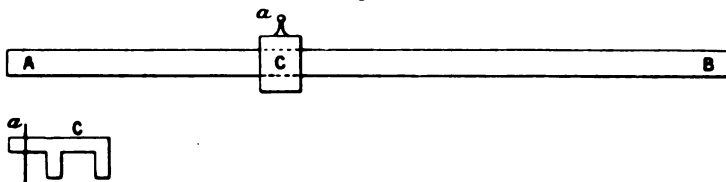
Le problème *pratique* de la décomposition d'un polynôme en facteurs, ou de la résolution des équations, a été étudié par d'illustres géomètres, tels que Newton et Lagrange, qui en ont proclamé l'importance.

Soit par des moyens symboliques, pour les premiers degrés ou dans des cas particuliers, soit par des moyens graphiques tels que les courbes d'erreurs, on peut parvenir à cette décomposition d'une façon plus ou moins pénible, suivant les cas.

Dans cette Communication, nous voulons aujourd'hui donner la description d'un petit appareil, très simple, qui permet d'obtenir avec une certaine approximation *toutes les solutions réelles* d'une équation à coefficients réels d'un degré quelconque.

Soit AB une règle métallique bien droite (pour laquelle il serait avantageux d'employer la forme en cornière afin d'éviter les déviations), règle sur laquelle un curseur muni d'une aiguille *a* glisse à frottement, cette aiguille étant elle-même mobile dans une petite douille (*fig. 1*).

Fig. 1.

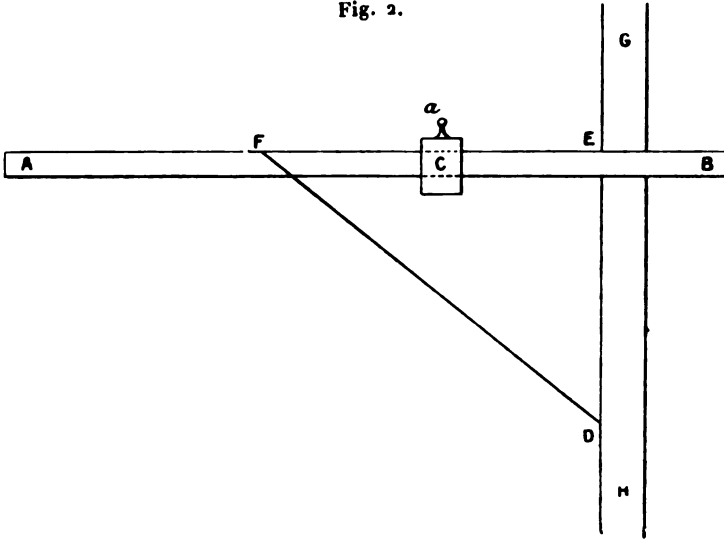


Collez cette règle sur une équerre DEF, de manière qu'elle dépasse au delà du point E d'une longueur suffisante pour couvrir une règle de même épaisseur que l'équerre (*fig. 2*).

Si l'on voulait obtenir une grande précision, et une rapidité et une commodité d'opération plus considérables, on pourrait fixer la règle sur une table où elle tournerait autour d'un pivot. La règle et l'équerre seraient graduées et munies d'un vernier dont

l'aiguille faciliterait au plus haut point l'emploi; mais, pour la

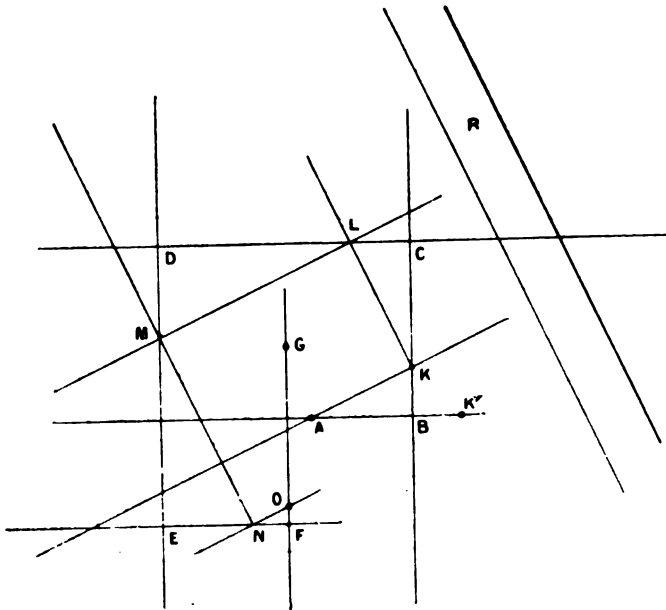
Fig. 2.



théorie, l'appareil que nous venons de décrire suffit.

Voici maintenant la manière de l'appliquer (*fig. 3*).

Fig. 3.



Soit ABCDEFG le représentant graphique (1) d'un polynôme du cinquième degré, à coefficients réels, en faisant $x = \sqrt{-1}$. Il est parfaitement évident que l'on pourrait donner à x telle valeur que l'on voudrait $\sqrt[m]{+A}$, et que, théoriquement, le procédé serait identiquement le même; mais il en résulterait une complication pour les grandeurs de translation et de rotation, que la valeur $\sqrt{-1}$ évite.

Toutes les opérations sont ramenées à l'emploi de l'équerre, ce qui simplifie au plus haut point les opérations.

La solution de l'équation

$$A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x^1 + A_5 x^0 = 0$$

est ramenée à la décomposition du polynôme du premier membre en ses facteurs. Graphiquement, cela revient à inscrire sur le 6-latère rectangulaire ABCDEFG un 5-latère rectangulaire dont le 1^{er} latère passe par le point A et le dernier par le point G, car, suivant la théorie de la méthode graphique,

$$AKLMNO \times ABK = ABCDEFO,$$

AKLMNO étant un 5-latère correspondant à l'un des facteurs du quatrième degré et jouant le rôle de multiplicateur, et ABK un 2-latère correspondant à un facteur du premier degré, jouant le rôle de multiplicande.

Posons la règle en dehors du graphique dans une direction quelconque, faisons glisser l'équerre sur la règle et le curseur sur la règle métallique, de manière que l'aiguille se pose en A. Un glissement du curseur donne instantanément le point K, un glissement de l'équerre sur la règle (le curseur étant immobile) donne le point L. Un nouveau glissement du curseur (l'équerre étant immobile) donne le point M; et, en procédant de la même façon, on obtient N et O.

Il est évident que l'angle BAK est trop faible et qu'il faut faire tourner la règle d'une certaine quantité pour rapprocher d'abord et pour amener ensuite aussi exactement que possible le point O

(1) Pour la représentation graphique des polynômes et la notion des latères (1-latère, 2-latère, etc.), se reporter à mes *Essais sur l'Algèbre graphique*, Digne, 1890.

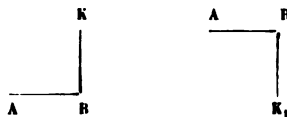
à coïncider avec le point G; au moment où ce résultat est obtenu, ABK est un des facteurs du 1^{er} degré de $ABCDEFG$ et $-\frac{BK}{AB} = \frac{KB}{AB}$ est une des racines réelles de l'équation, multipliée par $\sqrt{-1}$.

Si l'on divise par $\sqrt{-1}$, en faisant tourner la direction de BK du quart de tour complet, ABK' est le facteur du premier degré du 6-latère que l'on obtiendrait en faisant $x = +1$; ou graphiquement, en faisant faire de gauche à droite à BC un quart de tour, à CD un demi, à DE trois quarts, à EF un tour, à FG un tour et quart, ce qui donnerait une ligne droite, tous les latères ayant ainsi une seule et même direction.

Nous avons choisi comme exemple un polynôme à coefficients tous positifs, ce qui donne une ligne polygonale convexe. Mais l'opération graphique serait absolument identique si certains de ces coefficients étaient négatifs. La seule précaution qu'il faudrait prendre serait de numérotter les latères du produit $(AB - 1)$, $(BC - 2)$, $(CD - 3)$, $(DE - 4)$, $(EF - 5)$, $(FG - 6)$ et de faire attention que A est sur le premier latère, K sur le second, L sur le troisième, et ainsi de suite; de cette manière aucune erreur n'est possible.

Si le polynôme avait des coefficients positifs et négatifs, les deuxièmes latères des facteurs du premier degré auraient tantôt la

Fig. 4.



forme ABK , tantôt la forme ABK_1 , la première correspondant aux racines positives, la seconde aux racines négatives. L'étendue des tâtonnements en serait augmentée, de sorte qu'il vaut mieux, au moyen des procédés donnés dans tous les traités d'Algèbre élémentaire, ramener le polynôme à cette forme. Alors tous les 2-latères facteurs ont la forme ABK et le tâtonnement est terminé quand le point K a parcouru toute la longueur BC .

Pour obtenir tous les facteurs dans ce cas, il faut d'abord poser la règle perpendiculairement à la direction de l' A_0 (ici AB), puis la faire tourner jusqu'à ce que l'équerre amène l'aiguille sur le

point C, de sorte qu'il suffit alors de faire parcourir au point K la longueur BC.

Chaque fois que l'on atteindra le point G, ABK sera facteur de ABCDEFG. Si toutes les racines sont réelles, cela arrivera cinq fois et pas davantage; si elles ne le sont pas toutes, on l'atteindra autant de fois qu'il y a de racines réelles.

Pour ne pas allonger outre mesure cette Communication, nous nous abstiendrons de faire ressortir toutes les conséquences intéressantes qui résultent de la correspondance des méthodes graphiques et symboliques. Ainsi, si toutes les racines sont réelles, le latère BC est la somme de tous les latères BK des facteurs.

Si au lieu de x on veut $\frac{1}{x}$, on n'a qu'à retourner le 6-latère en prenant GF pour A_0 , FE pour A_1 et ainsi de suite, et l'on a GFEDCBA correspondant à l'équation

$$A_5 \left(\frac{1}{x} \right)^5 + A_4 \left(\frac{1}{x} \right)^4 + A_3 \left(\frac{1}{x} \right)^3 + A_2 \left(\frac{1}{x} \right)^2 + A_1 \left(\frac{1}{x} \right)^1 + A_0 \left(\frac{1}{x} \right)^0 = 0.$$

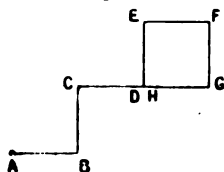
Il y aurait encore une foule d'autres considérations trop longues à énumérer. Cependant, nous croyons devoir faire une observation finale sommaire, qui a son importance. Chacun reconnaît l'importance théorique du théorème de Sturm pour la détermination du nombre des racines réelles entre deux limites données. Mais on sait aussi combien l'application pratique de cette méthode peut devenir pénible, presque impossible, même dans des cas relativement simples. Par exemple, pour l'équation

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x^2 - x + 1 = 0,$$

le nombre constant V_6 qui termine la suite des fonctions de Sturm n'a pas moins de *quarante-quatre chiffres*.

Or, si l'on représente graphiquement le polynôme ci-dessus,

Fig. 5.



en faisant $x = \sqrt{-1}$, on a le graphique ABCDEFGH; et le

premier venu, au bout de quelques instants, après quelques tâtonnements rapides à l'aide du petit instrument qui vient d'être décrit, pourra répondre à la question posée.

Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; par M. A. DEMOULIN.

1. Cette congruence jouit d'un grand nombre de propriétés intéressantes qui ont été mises en évidence par MM. Ball ⁽¹⁾, Stahl ⁽²⁾ et Waelsch ⁽³⁾. Dans la présente Note, nous démontrons, au sujet de cette congruence, la proposition suivante, qui nous semble nouvelle :

Jointe à une congruence du premier ordre et de la première classe, la congruence actuelle constitue l'intersection complète des complexes de Painvin relatifs à deux quadriques dégénérées ⁽⁴⁾.

2. Soient D_1, D_2, D_3 les trois droites données et H l'hyperboloïde qu'elles déterminent. Nous appellerons *génératrices du premier système* les génératrices de cet hyperboloïde qui ne coupent pas D_1, D_2, D_3 et *génératrices du second système* celles qui coupent ces droites. Tout complexe L passant par D_1, D_2, D_3 renferme toutes les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H . Cette propriété, dont la démonstration est immédiate, permet d'établir simplement l'équation générale des complexes L . Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H rapporté à ses axes. Les équations

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. IX, p. 541.

⁽²⁾ *Journal de Crelle*, t. 91, p. 1.

⁽³⁾ *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne; t. XCV, p. 781, 1887.

⁽⁴⁾ Dans une Note insérée au tome XX de ce *Bulletin* (p. 122), nous avons appelé *complexe de Painvin* d'une quadrique le complexe des droites par lesquelles on peut mener à cette quadrique deux plans tangents rectangulaires.

d'une génératrice quelconque du premier système peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos \theta + \sin \theta,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin \theta - \cos \theta$$

ou

$$\frac{x - a \sin \theta}{a \cos \theta} = \frac{y + b \cos \theta}{b \sin \theta} = \frac{z}{c},$$

θ désignant un paramètre variable. Cette génératrice passe par le point $(a \sin \theta, -b \cos \theta, 0)$ et elle a pour coefficients de direction $a \cos \theta, b \sin \theta, c$; ses coordonnées homogènes $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ sont donc

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = a \cos \theta, & \beta = b \sin \theta, & \gamma = c, \\ p = -bc \cos \theta, & q = -ac \sin \theta, & r = ab. \end{cases}$$

Ces équations montrent que les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H appartiennent aux trois complexes linéaires

$$(2) \quad bca + ap = 0, \quad ac\beta + bq = 0, \quad ab\gamma - cr = 0;$$

par conséquent, les complexes L, qui sont en nombre doublement infini, auront nécessairement une équation de la forme

$$(3) \quad \lambda(bca + ap) + \mu(ac\beta + bq) + ab\gamma - cr = 0,$$

λ et μ désignant deux paramètres arbitraires.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées de l'axe central (1)

(1) Les coordonnées de l'axe central d'un complexe linéaire quelconque

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0$$

sont données par les formules

$$\begin{aligned} \alpha &= P, & \beta &= Q, & \gamma &= R, \\ p &= A - kP, & q &= B - kQ, & r &= C - kR, \\ k &= \frac{AP + BQ + CR}{P^2 + Q^2 + R^2}. \end{aligned}$$

d'un complexe L, on a

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = \lambda a, & \beta = \mu b, & \gamma = -c, \\ p = \lambda(bc - ka), & q = \mu(ac - kb), & r = ab + kc, \end{cases}$$

$$k = \frac{abc(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + c^2}.$$

Ainsi se trouvent exprimées en fonction des deux paramètres λ et μ les coordonnées d'une droite quelconque de la congruence qui nous occupe.

Des formules (4) on déduit

$$(5) \quad q\gamma - r\beta = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}\right) \beta\gamma = M\beta\gamma,$$

$$(6) \quad p\beta - q\alpha = \left(\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b}\right) \alpha\beta = N\alpha\beta.$$

Dans notre Note citée plus haut, nous avons fait voir que si

$$\begin{aligned} & au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu \\ & + 2b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0 \end{aligned}$$

est l'équation d'une quadrique quelconque, en coordonnées tangentielles, l'équation du complexe de Painvin de cette quadrique sera

$$\begin{aligned} & \alpha^2(\alpha' + \alpha'') + \beta^2(\alpha'' + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \alpha') - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' \\ & + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0. \end{aligned}$$

De la forme de cette équation résulte une conséquence immédiate : Si une congruence appartient aux complexes de Painvin de deux quadriques

$$Q(u, v, w) = 0, \quad Q'(u, v, w) = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$Q(u, v, w) + \rho Q'(u, v, w) = 0,$$

ρ désignant un paramètre variable.

Cela posé, observons que les équations (5) et (6) sont celles des complexes de Painvin des quadriques

$$Mv w + u = 0,$$

$$Nu v + w = 0.$$

Il suit de la remarque qui vient d'être faite que la congruence actuelle appartient au complexe de Painvin de la quadrique

$$Mv w + u + \rho(Nu v + w) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(7) \quad u(1 + N\rho v) + w\rho \left(1 + \frac{Mv}{\rho}\right) = 0.$$

Profitons de l'indétermination de ρ pour égaliser les deux quantités entre parenthèses; nous aurons

$$N\rho = \frac{M}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \varepsilon \sqrt{\frac{M}{N}},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 . Si l'on suppose que b est le plus grand des axes réels de l'hyperboloïde H , N sera positif et la valeur de ρ sera réelle. En tenant compte de cette valeur, l'équation (7) devient

$$(1 + \varepsilon v \sqrt{MN}) \left(u + \varepsilon w \sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0.$$

La congruence actuelle appartient donc aux complexes de Painvin des quadriques

$$(8) \quad (1 + v \sqrt{MN}) \left(u + w \sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0,$$

$$(9) \quad (1 - v \sqrt{MN}) \left(u - w \sqrt{\frac{M}{N}}\right) = 0.$$

L'équation (8) représente un système de deux points : l'un F_1

$$1 + v \sqrt{MN} = 0$$

est situé sur l'axe des y à une distance $-\sqrt{MN}$ de l'origine; l'autre F_2

$$u + w\sqrt{\frac{M}{N}} = 0$$

est à l'infini dans la direction d'une droite parallèle au plan des xz et faisant avec l'axe des x un angle ω donné par la formule

$$\text{tang} \omega = \sqrt{\frac{M}{N}}.$$

Quant à l'équation (9), elle représente le système de deux points F'_1 et F'_2 définis comme il suit : F'_1 est le symétrique de F_1 par rapport à l'origine ; F'_2 est symétrique de F_2 par rapport à l'axe des z .

Appelons *angle sous lequel on voit d'une droite donnée un segment donné* l'angle des plans passant par la droite et par les extrémités du segment. Nous pourrions alors énoncer la propriété suivante :

De toute droite de la congruence qui nous occupe on voit sous des angles droits les segments F_1F_2 et $F'_1F'_2$.

3. Il ne nous reste plus maintenant qu'un mot à ajouter pour démontrer le théorème énoncé au n° 1. Les complexes de Painvin (5) et (6) ont en commun, outre la congruence actuelle, une congruence du premier ordre et de la première classe : celle des droites qui coupent l'axe des y à angle droit. Mais, comme on sait, la congruence actuelle est du troisième ordre et de la deuxième classe ; l'ensemble de ces deux congruences constitue donc bien l'intersection complète des complexes de Painvin (5) et (6).

Quelques remarques sur les équations du cinquième degré ;
par M. D. SÉLIVANOFF.

En 1889, j'ai publié un Travail, en langue russe, *Sur les équations du cinquième degré à coefficients entiers*, dont je vais reproduire ici quelques résultats.

Soit proposée une équation irréductible

$$x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers.

Dans la suite nous dirons simplement *fonction des racines* pour désigner une *fonction entière à coefficients rationnels des racines de l'équation proposée*.

Ainsi que Galois l'a démontré, il existe un groupe de substitutions jouissant des deux propriétés suivantes : 1° Une fonction des racines ayant une valeur rationnelle ne change pas de valeur numérique par les substitutions du groupe ; 2° une fonction des racines dont la valeur numérique ne change pas par les substitutions du groupe a une valeur rationnelle. Ce groupe est nommé *groupe de l'équation*. Les substitutions contenues dans le groupe de l'équation, qui ne changent pas la valeur d'une fonction des racines, forment un groupe. Le groupe de l'équation irréductible est transitif. Désignons les racines de l'équation proposée par

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4,$$

et supposons que $x_a = x_b$, si $a \equiv b \pmod{5}$.

En changeant chaque racine x_z en x_{z+1} on exécute une substitution circulaire ou *cyclique* (x_z, x_{z+1}) que l'on désigne aussi par $(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)$.

Le groupe d'une équation résoluble par radicaux est composé des substitutions de la forme (x_z, x_{az+b}) .

Soit G un groupe transitif donné

$$G = (s = 1, s_2, s_3, \dots, s_{5m}).$$

Ce groupe contient $5m$ substitutions, m désignant le nombre des substitutions qui laissent une racine invariable. On forme les vingt-quatre substitutions circulaires $(a \ b \ c \ d)$ en rempla-

çant a, b, c, d par les différents arrangements des quatre chiffres 1, 2, 3, 4.

Soit c_1 l'une de ces substitutions qui ne soit pas contenue dans le groupe G . Les $5m$ substitutions de la forme $s^{-1}c_1s$ ne sont pas contenues dans G , s étant une substitution du groupe G . Désignons ces substitutions par

$$(\alpha) \quad c_1, c_2, c_3, \dots, c_{5m}, \dots$$

Si la substitution circulaire c'_1 n'est pas contenue dans G et dans la série (α) , on forme de la même manière la série

$$(\beta) \quad c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_{5m}, \dots$$

des substitutions circulaires qui ne sont contenues ni dans G , ni dans la série (α) . En procédant de la même manière, on conclut que *le nombre des substitutions circulaires qui n'est pas contenu dans le groupe G est un multiple de 5.*

Soit maintenant c une substitution circulaire contenue dans G . Les substitutions

$$(a) \quad c, c^2, c^3, c^4,$$

sont aussi contenues dans G . Si la substitution circulaire c' est contenue dans G , mais non dans la série (a) , on forme la série

$$(b) \quad c', c'^2, c'^3, c'^4$$

contenue dans le groupe G . On démontre de cette manière que *le nombre des substitutions circulaires contenues dans le groupe G est un multiple de 4.*

En désignant par $4y$ le nombre des substitutions cycliques qui sont contenues dans le groupe G et par $5z$ le nombre de celles qui ne sont pas contenues dans G , on obtient

$$4y + 5z = 24.$$

Les seules solutions de cette équation en nombres entiers et positifs sont

$$y = 1, \quad z = 4 \quad \text{et} \quad y = 6, \quad z = 0.$$

Dans le premier cas, le groupe G contient une substitution cyclique c avec ses puissances

$$c, c^2, c^3, c^4.$$

Dans le second cas, le groupe G contient toutes les vingt-quatre substitutions cycliques.

Supposons que le groupe de l'équation G contienne un seul groupe cyclique

$$\Gamma = (1, s, s^2, s^3, s^4).$$

Les racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être disposées dans un ordre tel qu'on ait

$$s = (x_z, x_{z+1}).$$

Il est possible que $G = \Gamma$. Dans le cas contraire, il existe une substitution

$$t = (x_z, x_{\varphi(z)}),$$

qui est contenue dans G , mais non dans Γ . La substitution transformée $t^{-1}st$ est cyclique et par conséquent contenue dans Γ . On a donc l'équation

$$t^{-1}st = s^a,$$

a étant un des nombres, 2, 3, 4. En multipliant les deux membres de cette équation à gauche par t , on trouve

$$st = ts^a,$$

ou, en d'autres termes,

$$\varphi(z+1) = \varphi(z) + a.$$

En employant la notation du calcul des différences finies, on a

$$\Delta \varphi(z) = a.$$

Il en résulte

$$\varphi(z) = az + b;$$

par conséquent, *l'équation proposée est résoluble par radicaux.*

Les substitutions de la forme (x_z, x_{az+b}) peuvent former les groupes suivants :

1° *Le groupe cyclique* composé des substitutions

$$1, s, s^2, s^3, s^4,$$

où $s = (x_z, x_{z+1})$;

2° *Le groupe demi-métacyclique :*

$$1, s, s^2, s^3, s^4,$$

$$t, st, s^2t, s^3t, s^4t,$$

où $t = (x_z, x_{1z})$;

3° Le groupe métacyclique :

$$\begin{array}{l} 1, \quad s, \quad s^2, \quad s^3, \quad s^4, \\ u, \quad su, \quad s^2u, \quad s^3u, \quad s^4u, \\ u^2, \quad su^2, \quad s^2u^2, \quad s^3u^2, \quad s^4u^2, \\ u^3, \quad su^3, \quad s^2u^3, \quad s^3u^3, \quad s^4u^3, \\ u^4, \quad su^4, \quad s^2u^4, \quad s^3u^4, \quad s^4u^4, \end{array}$$

où $u = (x_z, x_{2z})$.

Ces dénominations sont dues à Kronecker.

Supposons maintenant que le groupe transitif G contienne toutes les substitutions cycliques. Le groupe G contient aussi la substitution

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)(0 \ 1 \ 4 \ 3 \ 2) = (0 \ 4 \ 1).$$

En transformant cette équation par les substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$(0 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1)(0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4) = (0 \ 1 \ 2),$$

$$(0 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)(0 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4) = (0 \ 1 \ 3),$$

$$(0 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1)(0 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3) = (0 \ 1 \ 4).$$

Le groupe G contenant les substitutions $(0 \ 1 \ 2)$, $(0 \ 1 \ 3)$ et $(0 \ 1 \ 4)$ est donc *alterné*, ou bien contient le groupe alterné. Dans le dernier cas, G est l'ensemble des cent vingt substitutions que l'on peut former avec cinq lettres. Ce groupe peut être nommé *symétrique*.

Jacobi a indiqué (*Gesammelte Werke*, Band III, p. 276-278) la fonction demi-métacyclique de cinq lettres

$$\begin{aligned} z_1 = & x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0 \\ & - x_0x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_0 - x_4x_1, \end{aligned}$$

dont la forme reste invariable par les substitutions du groupe demi-métacyclique.

Par les substitutions

$$(\gamma) \quad (0 \ 1 \ 2), \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (2 \ 3 \ 4), \quad (3 \ 4 \ 0), \quad (4 \ 0 \ 1)$$

contenues dans le groupe alterné la valeur z_1 se change en z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 .

La substitution (1 2 3 4) ne faisant pas partie du groupe alterné change $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ en $-z_1, -z_2, -z_3, -z_4, -z_5, -z_6$.

Telles sont les douze valeurs de la fonction z_1 . La fonction $z^2 = \sigma_1$, ayant six valeurs différentes, est donc une fonction métacyclique.

La fonction

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6) \\ = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6$$

ne change pas par les substitutions du groupe alterné.

Les substitutions qui ne sont pas contenues dans le groupe alterné changent a_1, a_3, a_5 en $-a_1, -a_3, -a_5$.

Ce sont donc les fonctions alternées et elles ont, par conséquent, la forme

$$a_1 = m_1 \sqrt{\Delta}, \quad a_3 = m_3 \sqrt{\Delta}, \quad a_5 = m_5 \sqrt{\Delta},$$

Δ étant le discriminant.

Les dimensions des fonctions a_1, a_3, a_5, Δ sont respectivement égales à 2, 6, 10, 20; par conséquent, a_1 et a_3 sont nuls et m_5 est un entier que nous désignerons par m .

Il résulte de cette analyse que

$$F(z) = z^6 + a_2 z^4 + a_4 z^2 + a_6 + m z \sqrt{\Delta}.$$

Les coefficients a_2, a_4, a_6 sont des fonctions entières à coefficients entiers des fonctions symétriques élémentaires

$$\Sigma x_0 = -p_1, \quad \Sigma x_0 x_1 = p_2, \quad \Sigma x_0 x_1 x_2 = -p_3, \\ \Sigma x_0 x_1 x_2 x_3 = p_4, \quad x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = -p_5.$$

Ainsi l'équation $F(z) = 0$, dont les racines sont $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$, a ses coefficients entiers. En remplaçant z^2 par σ dans l'expression $F(z) F(-z)$, on obtient l'équation

$$\varphi(\sigma) = (\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_4 \sigma + a_6)^2 - m^2 \Delta \sigma = 0,$$

dont les racines sont

$$\sigma_1 = z_1^2, \quad \sigma_2 = z_2^2, \quad \sigma_3 = z_3^2, \quad \sigma_4 = z_4^2, \quad \sigma_5 = z_5^2, \quad \sigma_6 = z_6^2.$$

Supposons que l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ ait une racine α rationnelle

et, par conséquent, entière. En rangeant les racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 dans un ordre convenable, nous aurons $\sigma_1 = \alpha$. Les substitutions qui changent la valeur numérique de σ_1 ne sont pas contenues dans le groupe de l'équation

$$f(x) = x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0.$$

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ n'a pas de racines égales, les substitutions

$$(\gamma) \quad (0 \ 1 \ 2), \ (1 \ 2 \ 3), \ (2 \ 3 \ 4), \ (3 \ 4 \ 0), \ (4 \ 0 \ 1)$$

du groupe alterné changent la valeur σ_1 . Le groupe de l'équation proposée, ne contenant pas les substitutions (γ) , est donc métacyclique ou bien fait partie du groupe métacyclique. Dans ce cas, l'équation proposée est résoluble par radicaux.

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ a des racines égales, il est possible que la valeur numérique σ_1 reste invariable pour certaines des substitutions (γ) . Supposons que le groupe de l'équation $f(x) = 0$ contienne le groupe alterné. La valeur σ_1 doit rester invariable pour toutes les substitutions du groupe alterné, car il n'existe pas de groupe transitif faisant partie du groupe alterné et contenant le groupe métacyclique. Il en résulte que

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \alpha)^6.$$

Nous obtenons l'identité suivante

$$(\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0)^2 - m^2 \Delta \sigma = (\sigma - \alpha)^6,$$

qui peut être mise sous la forme

$$(\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + a_0)^2 - (\sigma^3 - 3a \sigma^2 + 3a^2 \sigma - a^3)^2 = m^2 \Delta \sigma$$

ou

$$(2\sigma^3 + p\sigma^2 + q\sigma + r)(t\sigma^2 + u\sigma + v) = m^2 \Delta \sigma.$$

En égalant les coefficients de σ^5 , σ^4 et σ^3 dans les deux membres de cette équation, on trouve

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

et, par conséquent, Δ serait nul; or l'équation $f(x) = 0$ est supposée irréductible et son discriminant ne peut pas être nul. Il est

donc démontré que le groupe de l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas contenir le groupe alterné et l'équation proposée est aussi résoluble par radicaux dans le cas considéré.

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ n'a pas de racines rationnelles, les fonctions métacycliques n'étant pas rationnelles, le groupe de l'équation $f(x) = 0$ contient le groupe alterné et l'équation $f(x) = 0$ n'est pas résoluble par radicaux.

On a donc ce théorème :

Pour que l'équation irréductible

$$f(x) = x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0,$$

à coefficients entiers, soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que l'équation

$$\varphi(\sigma) = (\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_4 \sigma + a_6)^2 - m^2 \Delta \sigma = 0$$

ait au moins une racine entière.

Pour les équations de la forme

$$f(x) = x^5 + ux + v = 0,$$

les valeurs de a_2 , a_4 , a_6 , m et Δ peuvent être obtenues presque sans calcul, comme l'a démontré M. Runge dans un article inséré au Tome VII des *Acta mathematica* (p. 173-186). On y trouve le résultat suivant :

$$\varphi(\sigma) = (\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)^2 - \Delta\sigma.$$

M. Runge met encore cette fonction sous la forme

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - u)^4 (\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2) - 5^5 v^4 \sigma.$$

Faisons $u = \pm 1$. La racine entière de l'équation

$$5^5 v^4 \sigma = (\sigma \mp 1)^4 (\sigma^2 \mp 6\sigma + 25)$$

doit être positive, car

$$\sigma^2 \mp 6\sigma + 25 = (\sigma \mp 3)^2 + 16.$$

Le nombre σ est diviseur de 25 et, par conséquent, les seules valeurs à examiner sont $\sigma = 1, 5, 25$.

Comme ces valeurs ne vérifient pas l'équation, on a le théorème suivant :

Les équations de la forme

$$x^5 + ux + v = 0 \quad (u = \pm 1)$$

ne sont pas résolubles par radicaux, quand elles sont irréductibles.

Ce théorème a été démontré par M. Runge dans le cas où $u = 1$.
La recherche des diviseurs linéaires de la fonction

$$f(x) = x^5 + ux + v$$

ne présente aucune difficulté. Pour trouver les diviseurs quadratiques, on divise $f(x)$ par $x^2 + a_1x + a_2$ et l'on égale à zéro le reste de la division. On a ainsi deux équations

$$(1) \quad a_1^2 - 3a_1a_2 + a_1 + u = 0,$$

$$(2) \quad a_1a_2(2a_2 - a_1^2) - v = 0,$$

qui servent à déterminer les nombres entiers a_1 et a_2 . Ces nombres doivent encore satisfaire aux conditions

$$|a_1| < 2\rho, \quad |a_2| < \rho^2,$$

ρ étant la limite supérieure des modules des racines de l'équation $f(x) = 0$. La recherche des diviseurs quadratiques est ainsi réduite à un nombre fini d'opérations.

L'impossibilité des équations (1) et (2) devient quelquefois manifeste, si les premiers membres de ces équations ne sont pas divisibles par un nombre premier. Soit l'équation

$$f(x) = x^5 + x - v, \quad v > 0.$$

Si l'on avait $v < 0$, il suffirait de remplacer $f(x)$ par $-f(-x)$.
En supposant, par exemple, $\rho = 6$, on a

$$v < 6^5 - 6 \quad \text{ou} \quad v < 7770.$$

La fonction $f(x)$ a des diviseurs linéaires pour

$$v = 1^5 + 1, \quad 2^5 + 2, \quad 3^5 + 3, \quad 4^5 + 4, \quad 5^5 + 5$$

ou

$$v = 2, \quad 34, \quad 246, \quad 1028, \quad 3130.$$

Cette fonction est divisible par $x^2 + a_1 x + a_2$, si les nombres entiers a_1 et a_2 satisfont aux équations

$$a_1^2 - 3a_1 a_2 + a_1 + 1 = 0, \quad a_1 a_2 (2a_2 - a_1^2) + v = 0.$$

En résolvant la première par rapport à a_2 , on obtient

$$2a_2 = 3a_1^2 + s,$$

où $s^2 = 5a_1^4 - 4$.

La seconde équation prend la forme

$$a_1(3a_1^2 + s)(3a_1^2 + s) = -2v.$$

Ayant trouvé les nombres entiers a_1 et s qui vérifient les conditions

$$5a_1^4 - s^2 = 4, \quad -12 < a_1 < 12,$$

on détermine les valeurs correspondantes de a_2 et v par les formules obtenues.

Si a_1 est pair, s est aussi pair. En posant

$$a_1 = 2z, \quad s = 4t \quad \text{ou} \quad 4t + 2,$$

on obtient les équations impossibles

$$20z^4 = 4t^2 + 1 \quad \text{ou} \quad 20z^4 = 4t^2 + 4t + 2;$$

d'où l'on conclut que a_1 est un nombre impair.

Supposons que a_1 soit divisible par un nombre premier p . Il suit de la congruence

$$s^2 \equiv -4 \pmod{p}$$

que le symbole de Legendre

$$\left(\frac{-4}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

doit être égal à 1. Donc p est de la forme $4k + 1$.

En excluant les valeurs paires de a_1 , ou divisibles par les nombres premiers de la forme $4k + 3$, nous n'obtenons que les valeurs suivantes

$$a_1 = \pm 1, \quad a_1 = \pm 5.$$

Pour $a_1 = \pm 1$, on trouve les résultats suivants

$$\begin{aligned}x^5 + x - 1 &= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1), \\x^5 + x - 6 &= (x^2 - x + 2)(x^3 + x^2 - x - 3).\end{aligned}$$

La valeur $a_1 = \pm 5$ ne convient pas, car le nombre

$$5^5 - 4 = 3121$$

n'est pas un carré parfait. On a donc ce théorème :

Les équations de la forme

$$x^5 + x - v = 0 \quad (0 < v < 7770)$$

ne sont résolubles par radicaux que pour

$$v = 1, 2, 6, 34, 246, 1028, 3130.$$

Passons maintenant à l'équation

$$f(x) = x^5 - x - v = 0 \quad (v > 0),$$

en supposant toujours $p = 6$. On a encore

$$v < 6^5 - 6 \quad \text{ou} \quad v < 7770.$$

La fonction $f(x)$ a des diviseurs linéaires pour

$$v = 2^5 - 2, \quad 3^5 - 3, \quad 4^5 - 4, \quad 5^5 - 5$$

ou

$$v = 30, \quad 240, \quad 1020, \quad 3120.$$

La fonction $f(x)$ est divisible par $x^2 + a_1x + a_2$, si les nombres a_1 et a_2 vérifient les conditions

$$a_2^2 - 3a_1^2a_2 + a_1^3 - 1 = 0, \quad a_1a_2(2a_2 - a_1^2) + v = 0.$$

En déterminant les entiers a_1 et s de manière que

$$s^2 - 3a_1^2 = 4, \quad -12 < a_1 < 12,$$

on trouve les valeurs correspondantes de a_2 et v par les formules suivantes

$$\begin{aligned}2a_2 &= 3a_1^2 + s, \\a_1(2a_1^2 + s)(3a_1^2 + s) &= -2v.\end{aligned}$$

Le nombre α_1 est pair en même temps que s . En posant

$$\alpha_1 = 2z, \quad s = 2t,$$

on trouve

$$20z^4 = (t+1)(t-1).$$

Le nombre t est impair, car le premier membre de cette équation est pair. Soit donc $t = 2m+1$; on a

$$5z^4 = m(m+1).$$

Les nombres m et $m+1$ sont premiers entre eux.

L'équation obtenue est impossible, car le nombre $5z^4$ n'est pas un produit de deux nombres consécutifs premiers entre eux. Il est donc démontré que α_1 est un nombre impair.

Supposons que α_1 soit premier ou une puissance d'un nombre premier. Il suit de l'équation

$$5\alpha_1^4 = (s+2)(s-2)$$

que $5\alpha_1^4$ doit être décomposable en deux facteurs dont la différence est 4. Ces facteurs ne peuvent donc pas avoir un diviseur commun autre que 2 ou 4. Il en résulte que

$$s+2 = 5\alpha_1^4, \quad s-2 = 1,$$

ou bien

$$s+2 = -1, \quad s-2 = -5\alpha_1^4$$

et, par conséquent,

$$s = \pm 3, \quad \alpha_1 = \pm 1.$$

Si α_1 n'est pas égal à 5 ou à une puissance de 5, on a encore la décomposition

$$s+2 = \alpha_1^4, \quad s-2 = 5,$$

ou

$$s+2 = -5, \quad s-2 = -\alpha_1^4,$$

en supposant $\alpha_1^2 > 1$. De là résulte l'équation impossible

$$\alpha_1^4 = 9.$$

En examinant les seuls cas qui restent, $\alpha_1 = \pm 1$, on trouve le résultat suivant

$$x^5 - x - 15 = (x^2 - x + 3)(x^3 + x^2 - 2x - 5),$$

en supposant toujours $x > 0$.

On peut donc énoncer ce théorème :

Les équations de la forme

$$x^5 - x - v = 0 \quad (0 < v < 7770)$$

ne sont résolubles par radicaux que pour

$$v = 15, \quad 30, \quad 240, \quad 1020, \quad 3120.$$

Toutes ces valeurs de v sont divisibles par 15.

Nous allons démontrer que l'équation

$$f(x) = x^5 - x - v = 0$$

n'est pas résoluble par radicaux, si v n'est pas multiple de 15.

Il suffit de démontrer l'irréductibilité de cette équation. Prenons 3 pour module. L'équation $f(x) = 0$ peut avoir une racine entière a , si une des congruences

$$f(0) \equiv 0, \quad f(1) \equiv 0, \quad f(-1) \equiv 0 \pmod{3}$$

a lieu.

En remarquant que pour l'équation considérée

$$f(0) \equiv -v, \quad f(1) \equiv -v, \quad f(-1) \equiv -v \pmod{3},$$

on conclut que l'équation proposée n'a pas de racines entières, si v n'est pas divisible par 3.

Supposons que $f(x)$ soit divisible par $x^2 + a_1x + a_2$. Les équations (1) et (2) peuvent être remplacées par les congruences

$$a_1^2 + a_2^2 - 1 \equiv 0, \quad a_1a_2(a_1^2 + a_2^2) \equiv -v \pmod{3}.$$

Si a_1 est divisible par 3, v l'est aussi. Si a_1 n'est pas divisible par 3, on a

$$a_1^2 \equiv 1, \quad a_2^2 \equiv 0, \quad v \equiv 0 \pmod{3}.$$

Donc la fonction $f(x)$ n'a pas de diviseurs quadratiques, si v n'est pas divisible par 3.

Passons au module 5. D'après le théorème de Fermat, pour tout entier a , on a

$$a^5 - a \equiv 0 \pmod{5},$$

et, par conséquent,

$$f(a) \equiv -v \pmod{5}.$$

Donc $f(x)$ n'a pas de diviseurs linéaires, si v n'est pas multiple de 5.

En supposant que $f(x)$ soit divisible par $x^2 + a_1x + a_2$, on

obtient les congruences

$$\begin{aligned} a_2(a_2 + 2a_1^2) + a_1^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{5}, \\ a_1 a_2(2a_2 - a_1^2) + v &\equiv 0 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Le nombre v est divisible par 5 en même temps que a_1 ou a_2 . En posant $a_1 \equiv \pm 1 \pmod{5}$, on trouve

$$a_2(a_2 + 2) \equiv 0, \quad \pm a_2(2a_2 - 1) + v \equiv 0 \pmod{5}.$$

Si a_2 n'est pas divisible par 5, on a

$$a_2 \equiv -2, \quad 2a_2 - 1 \equiv 0, \quad v \equiv 0 \pmod{5}.$$

On démontre de la même manière qu'on a aussi $v \equiv 0 \pmod{5}$, quand $a_1 \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Propriétés d'un système de points dans un plan;

par M. FÉLIX LUCAS.

Considérons dans le plan un système quelconque de p points M , ayant pour affixes les racines de l'équation

$$(1) \quad F(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = 0.$$

Points centraux. — Les points centraux C de ce système sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre, en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse. Ce sont les points racines de l'équation dérivée

$$(2) \quad F'(z) = p(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_{p-1}) = 0.$$

On a identiquement

$$(3) \quad F_m(z_m) = \left[\frac{F(z)}{z - z_m} \right]_{z=z_m} = F'(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad F_1(z_1) F_2(z_2) \dots F_p(z_p) = F'(z_1) F'(z_2) \dots F'(z_p).$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$\prod \overline{M_m M_n}^2 = p^p \prod \overline{M_m C_n}.$$

c'est-à-dire que le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points M est égal à p^p fois le produit des distances de ces points M à leurs points centraux C .

Dans le cas particulier où les points M occupent les sommets d'un polygone régulier de rayon R , tous les points C occupent le centre de ce polygone; on voit ainsi que le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets d'un polygone régulier de rayon R est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. Ce théorème s'exprime par la formule trigonométrique

$$(5) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \sin \frac{m\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Conjugués d'un point quelconque S. — Considérons maintenant, en présence des points M , un point quelconque S du plan et soit τ son affixe. Les *conjugués* P de ce point, relativement au système M , sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre en présence des attractions des points M ayant l'unité de masse et de la répulsion du point S ayant la masse p . Ces conjugués de S sont les points racines de l'équation du degré $p-1$

$$p F(\tau) - (\tau - \tau) F'(\tau) = 0.$$

Le coefficient du terme du plus haut degré, c'est-à-dire le coefficient de τ^{p-1} , est $p(\tau - \gamma)$, en désignant par γ l'affixe du centre des moyennes distances C des points donnés. On peut donc déterminer les affixes des conjugués de S , en égalant à zéro le polynôme

$$(6) \quad \varphi(\tau) = \frac{p F(\tau) - (\tau - \tau) F'(\tau)}{p(\tau - \gamma)} = (\tau - \zeta_1)(\tau - \zeta_2) \dots (\tau - \zeta_{p-1}).$$

Cela posé, on a identiquement

$$(7) \quad p(\tau - \gamma) \varphi(\tau_m) = (\tau - \tau_m) F'(\tau_m) = (\tau - \tau_m) F_m(\tau_m)$$

et, par conséquent,

$$(8) \quad p^p \frac{\varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{F_1(z_1) F_2(z_2) \dots F_p(z_p)} = \frac{(\sigma - z_1)(\sigma - z_2) \dots (\sigma - z_p)}{(\sigma - \gamma)^p}.$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$(9) \quad p^p \frac{\prod \overline{M_m P_n}}{\prod \overline{M_m M_n}} = \frac{\prod \overline{S M_m}}{S G^p};$$

c'est-à-dire que le produit des distances des points M aux conjugués P du point S , multiplié par p^p et divisé par le produit des carrés des distances des points M , est égal au produit des distances du point S aux points M , divisé par la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance de ce point S au centre des moyennes distances G de ces points M .

Dans le cas particulier où les points M occupent les p sommets d'un polygone régulier de rayon R , et où le point S est pris sur la circonférence circonscrite à ce polygone, la distance SG est égale à R et, en vertu d'un théorème précédent, le produit des carrés des distances des points M est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. La formule (9) devient alors

$$(10) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \overline{M_m P_n} = R^{p(p-1)} \prod_{m=1}^{m=p} \overline{M_m S}.$$

En prenant le point G pour origine des coordonnées et la droite GM_1 pour axe des x , on a

$$(11) \quad F(z) = z^p - R^p$$

et

$$(12) \quad \varphi(z) = z^{p-1} - \frac{R^p}{z}.$$

Le module de σ est égal à R ; nous pouvons supposer le point S placé entre M_p et M_1 , et représenter son argument par -2ω , en désignant par ω un angle positif inférieur à $\frac{\pi}{p}$. L'équation (12) devient alors

$$(13) \quad \varphi(z) = z^{p-1} - R^{p-1} e^{2i\omega};$$

elle montre, en supposant $p > 3$, que les conjugués P de S occupent les $(p-1)$ sommets d'un polygone régulier de même rayon R que celui des points M. On trouve un de ces points P et un seul sur chacun des arcs $M_m M_{m+1}$, parmi lesquels ne figure pas l'arc $M_p M_1$ qui contient le point S. Le rayon GP_1 , correspondant au point situé sur l'arc $M_1 M_2$, fait avec GM_1 l'angle $\frac{2\omega}{p-1}$. On a, par suite, aux signes près,

$$(14) \quad \begin{cases} M_m S = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right], \\ M_m P_n = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right], \end{cases}$$

en sorte que la formule (10) devient, en faisant $R = 1$,

$$(15) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right] = \frac{1}{2^{p(p-2)}} \prod_{m=1}^{m=p} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right].$$

On en déduit, pour $\omega = 0$,

$$(16) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} + \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p (p-1)}{2^{p(p-2)}} \frac{1}{\prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \frac{n\pi}{p-1}}.$$

d'où, en tenant compte de la formule (5) dans laquelle on remplace m par n et p par $p-1$,

$$(17) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} - \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{(p-1)(p-2)}}.$$

Sur les racines primitives; par M. FROLOV.

1. Euler fut amené à la conclusion, qu'il est impossible de saisir entre un nombre premier et ses racines primitives aucune relation, d'où l'on puisse déduire au moins une seule de ces racines, de sorte qu'on ne peut, d'après lui, les découvrir que par tâtonnements, c'est-à-dire en essayant différents nombres. Quoique Gauss ait donné une méthode très ingénieuse pour découvrir sans tâtonnements une racine primitive d'un module premier, cette méthode est tellement compliquée qu'on ne l'emploie guère. La complication de cette méthode apparaît déjà dans l'exemple donné par Gauss lui-même. En effet, pour découvrir que le nombre 5 est une racine primitive du nombre 73, il a dû former les périodes des trois nombres 2, 3 et 54, qui sont tous résidus quadratiques de 73, tandis qu'on serait arrivé au même résultat beaucoup plus vite, en commençant par essayer 5, comme le plus petit parmi les non-résidus quadratiques de 73, ce qui aurait épargné beaucoup de peine.

C'est probablement à cause de la complication de cette méthode que Poincot, dans ses *Réflexions sur la théorie des nombres*, publiées en 1845, proposa de déterminer les racines primitives d'un module premier m par l'exclusion des résidus des puissances, dont les exposants sont marqués par les facteurs premiers du nombre $(m - 1)$. Mais, comme l'a déjà remarqué le très regretté J.-A. Serret, cette méthode devient presque impraticable, dès que le module est un peu considérable.

Ainsi, pour déterminer les racines primitives d'un module premier, on est encore obligé, comme du temps d'Euler, de recourir aux essais de différents nombres. Évidemment, on doit prendre ces derniers parmi les non-résidus quadratiques du module, car il est facile de discerner les nombres qui sont résidus quadratiques de ceux qui ne le sont pas. Les résidus quadratiques sont d'abord les carrés inférieurs à m , savoir 1, 4, 9, 16, . . . ; puis, pour les modules de la forme $m = 4h - 1$, ce sont les nombres $h, h + 2, h + 6, h + 12, \dots$ tous compris dans la formule $r \equiv -\frac{m+x^2}{4}$, où x est un nombre indéterminé impair, et pour les modules $m = 4h + 1$, ce sont les nombres $-h, -h + 2, -h + 6,$

$-h = 1, 2, \dots$; tous compris dans la formule $r \equiv \frac{m-x^2}{4}$, où x est aussi un nombre indéterminé impair. On reconnaît encore facilement si les nombres $\equiv 2, \equiv 3, \equiv 5, \dots$ sont résidus ou non-résidus quadratiques, d'après les formules déduites par Fermat, Euler et autres grands géomètres. Quant aux non-résidus quadratiques, on ne les détermine directement que pour les modules de la forme $4h-1$, car dans ce cas ce sont les compléments des carrés et des résidus quadratiques. Voici encore une proposition qui permettra de découvrir pour la plupart des modules premiers m quelques résidus et non-résidus quadratiques :

Soient ξp celui des deux nombres $m-1$ et $m+1$ qui est divisible par ξ , et $2q$ l'autre qui ne l'est pas; tous les facteurs premiers de p et les facteurs premiers de q de la forme $\xi k-1$ sont résidus quadratiques de m , tandis que les facteurs premiers de q de la forme $\xi k+1$, ainsi que 2, si p est impair, sont non-résidus quadratiques.

On obtiendra d'autres résidus, en multipliant deux résidus ou deux non-résidus, et d'autres non-résidus, en multipliant un non-résidu par un résidu.

Par exemple, pour $m = 191$, on a $m-1 = 190 = 2 \cdot 5 \cdot 19$, et $m+1 = 192 = 2^6 \cdot 3$; donc $p = 2^6 \cdot 3$ et $q = 5 \cdot 19$; par conséquent on aura les résidus 2, 3, 5, 6, 10, 15, ... et les non-résidus 19, 38, 57, 95, ... Pour $m = 197$, on a $m-1 = 196 = 2^2 \cdot 7^2$ et $m+1 = 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$; donc $p = 7^2$ et $q = 3^2 \cdot 11$, et l'on aura les résidus 6, 7, 22, ... et les non-résidus 2, 3, 11, 14, ... Pour $m = 263$, on a $m-1 = 262 = 2 \cdot 131$ et $m+1 = 264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$; donc $p = 2 \cdot 3 \cdot 11$ et $q = 131$, et l'on aura les résidus 2, 3, 6, 11, ... et les non-résidus

$$131; 131 \cdot 3 \equiv 130; 130 \cdot 11 \equiv 120; 120 \cdot 11 \equiv 10; \dots$$

Il arrive souvent que les non-résidus obtenus de cette manière sont racines primitives. Ainsi, 191 a les racines primitives 19, 57 et 95; 197 a 2, 3 et 11; 263 a 131, 130, 120 et 10. Mais nous allons montrer qu'on n'aura à recourir aux essais de ce genre que dans des cas bien rares.

2. Il y a des cas, où les racines d'un module premier se déter-

minent immédiatement, sans aucun essai. Avant de les signaler, rappelons que l'on dit, avec Euler, que deux nombres sont *associés* entre eux, si leur produit est congru à 1. Ainsi a et b sont associés entre eux, s'il y a la congruence $ab \equiv 1 \pmod{m}$. Leurs complémentaires à m sont aussi associés entre eux, car on a $(m-a)(m-b) \equiv -a-b = ab \equiv 1$. En changeant les signes, on aura $-ab \equiv -1$; donc le produit d'un nombre a par le complément de son associé $-b$ est congru à -1 . Pour abréger, nous dirons que deux nombres, dont le produit est congru à -1 , sont *contre-associés* entre eux.

Dans un groupe de quatre termes $a, b, -b, -a$, chacun d'eux a son associé, son contre-associé et son complémentaire à m . Nous dirons que a et $-a$ sont les *termes extrêmes*, et b et $-b$ sont les *termes moyens* de ce groupe.

On sait que deux nombres complémentaires 1 et $m-1 \equiv -1$ sont associés chacun à lui-même, car $1^2 \equiv 1$ et $(-1)^2 \equiv 1$. Ajoutons qu'ils sont contre-associés l'un de l'autre, car on a $1(-1) \equiv -1$. Donc ces deux nombres forment un groupe complet, qu'on peut écrire de la manière suivante 1, 1, $-1, -1$.

Pour $m = 4h + 1$, il y a encore deux autres nombres complémentaires, que nous désignerons par ω et $-\omega$, qui sont associés entre eux, en satisfaisant à la congruence $-\omega^2 \equiv 1 \pmod{m}$. En changeant les signes, on aura $\omega^2 = (\pm \omega)^2 \equiv -1$, ce qui signifie que chacun de ces deux nombres est contre-associé à lui-même. Ces nombres forment le groupe complet $\omega, -\omega, \omega, -\omega$.

Les nombres ω et $-\omega$, ainsi que 1 et -1 , sont résidus de tous les degrés impairs qui sont facteurs de $(m-1)$, pour tous les modules m au-dessus de 5.

En effet, soit g une racine primitive quelconque de $m = 4h + 1$.

On aura $g^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$, et comme on a $\omega^2 \equiv -1$, il viendra $\omega^2 \equiv g^{\frac{m-1}{2}}$, d'où l'on tire

$$\pm \omega \equiv \pm g^{\frac{m-1}{4}} \equiv \pm g^h.$$

Il en résulte : 1° que si h est impair, ω et $-\omega$ sont résidus de tous les degrés impairs de h et de $(m-1)$, et 2° que si h est pair, ils sont en outre résidus quadratiques de m .

Par exemple, pour $m = 37 = 4 \cdot 9 + 1$ et $h = 9$, on a $w = 6$ et $-w = 31$, qui sont résidus seulement du troisième degré, car h est impair; tandis que, pour $m = 41 = 4 \cdot 10 + 1$ et $h = 10$, on a $w = 9$ et $-w = 32$, qui sont résidus du cinquième degré et résidus quadratiques, car h est pair.

3. Nous signalerons trois cas, où les non-résidus quadratiques d'un module sont ses racines primitives.

I. *Tout module premier de la forme $m = 2^{2c} + 1$, où c est un nombre quelconque, a pour racines primitives tous ses non-résidus quadratiques et entre autres les nombres 3, 5 et 10.*

C'est évident, car le nombre $m - 1 = 2^{2c}$ n'ayant qu'un seul facteur premier 2, tous les nombres inférieurs à m sont résidus ou non-résidus quadratiques, et tous ces derniers sont nécessairement racines primitives de m ; et comme les nombres premiers de la forme $2^{2c} + 1$ appartiennent aux formes $8h + 1$, $12h + 5$ et $10h + 3$, il s'ensuit qu'ils ont le résidu quadratique 2 et les non-résidus 3 et 5, qui sont par conséquent leurs racines primitives, ainsi que 10, qui est le produit d'un résidu par un non-résidu. Par exemple, les modules $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$, $65537 = 2^{16} + 1$, ... ont tous les racines primitives 3, 5 et 10 et n'ont pas la racine primitive 2.

II. *Tout module premier de la forme $m = 2n + 1$, où n est un nombre premier impair, a pour racines primitives également tous ses non-résidus quadratiques, sauf $m - 1 \equiv -1$.*

En effet, dans ce cas, il n'y a que deux résidus du degré impair n , et comme ce sont les nombres 1 et -1 , tous les autres nombres sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives de m . Par exemple, $m = 26003 = 2 \cdot 13001 + 1$, étant de la forme $8h + 3$, a le non-résidu quadratique 2; par conséquent ce nombre est une racine primitive de 26003.

III. *Tout module premier $m = 4n + 1$, où n est un nombre premier impair, a de même pour racines primitives tous ses non-résidus quadratiques.*

En effet, dans ce cas, il y a quatre résidus du degré n , qui sont les nombres 1 , -1 , ω et $-\omega$, tandis que tous les autres nombres sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives de m . Par exemple, pour $m = 32069 = 4.8017 + 1$, qui appartient aux formes $8h - 3$ et $12h - 3$, les nombres 2 et 3 sont non-résidus quadratiques, et par conséquent ils sont racines primitives de 32069 .

4. Nous allons exposer brièvement, en omettant les démonstrations peu essentielles, un procédé qui permettra de découvrir rapidement les racines primitives de la plupart des nombres, sans aucun essai.

Il consiste dans le déploiement des $(m - 1)$ nombres, inférieurs au module m , en chaînes de groupes de quatre termes, associés, contre-associés et complémentaires, que nous avons considérés dans le n° 2; ces chaînes sont très faciles à construire, car il est permis de faire l'échange des facteurs entre deux nombres associés ou contre-associés, et comme l'un des deux termes extrêmes ou moyens est toujours pair, on peut le diviser par 2, en multipliant par 2 son associé ou contre-associé, le plus petit des deux.

Il en résultera deux nouveaux termes associés ou contre-associés et l'on n'aura qu'à y adjoindre leurs complémentaires à m , pour obtenir un groupe nouveau.

Par exemple, on a, pour $m = 281$, le groupe

$$24, \quad 82, \quad 199, \quad 257.$$

En multipliant par 2 le terme 24 et en divisant par 2 le terme 82, on obtiendra le groupe

$$48, \quad 41, \quad 240, \quad 233.$$

Si, au contraire, on multiplie par 2 le terme 82, en divisant par 2 le terme 24, on aura le groupe

$$12, \quad 164, \quad 117, \quad 269.$$

Ces trois groupes formeront une portion d'une chaîne

$$\dots \quad 12, \quad 164, \quad 117, \quad 269; \quad 24, \quad 82, \quad 199, \quad 257; \quad 48, \quad 41, \quad 240, \quad 233: \dots,$$

qu'on pourra prolonger des deux côtés, en répétant la même opération, jusqu'à ce qu'on arrive à des groupes qui ne puissent plus en produire de nouveaux, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive des deux côtés au même groupe.

Dans le premier cas on aura une *chaîne ouverte*, terminée par deux groupes, que nous appellerons *groupes d'arrêt*. Il y a quatre espèces de groupes d'arrêt :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1; \qquad 2^\circ \quad w, \quad -w, \quad w, \quad -w, \\ 3^\circ & u, \quad -2u, \quad 2u, \quad -u; \qquad 4^\circ \quad v, \quad 2v, \quad -2v, \quad -v, \end{array}$$

que nous désignerons respectivement par les notations abrégées $[1]$, $[w]$, $[u]$, $[v]$.

Dans le dernier cas, la chaîne rentre en elle-même et nous dirons qu'elle est *circulaire* ou *fermée*.

Pour m de la forme $4h - 1$, il n'y a pas de groupe w ; donc il n'y aura qu'une seule chaîne ouverte, terminée par $[1]$ et $[u]$, si h est impair, ou par $[1]$ et $[v]$, si h est pair.

Pour m de la forme $4h + 1$, il y a aussi une seule chaîne ouverte, terminée par $[1]$ et $[w]$, si h est impair. Au contraire, si h est pair, on a deux chaînes ouvertes, terminées par quatre groupes d'arrêt : $[1]$, $[w]$, $[u]$, $[v]$.

Remarquons ici qu'il est indifférent de multiplier ou de diviser par 2 l'un ou l'autre terme complémentaire, car le résultat reste le même. En effet, soit g une racine primitive de m et $\alpha \equiv g^l$. Alors un groupe quelconque $a, b, -b, -a$ peut être représenté de la manière suivante :

$$g^l, \quad g^{m-1-l}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l},$$

car on a

$$g^l \cdot g^{m-1-l} \equiv g^{m-1} \equiv 1, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l} \cdot g^{\frac{m-1}{2}+l} \equiv g^{m-1} \equiv 1.$$

Soit $2 \equiv g^k$. En multipliant par 2 le premier terme g^l , on aura

$$g^{l+k}, \quad g^{m-1-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l+k}$$

et, si l'on multiplie par 2 le dernier terme $g^{\frac{m-1}{2}+l}$, on aura également

$$g^{l+k}, \quad g^{m-1-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l+k}.$$

Donc le résultat est le même dans les deux cas.

5. Si, en commençant une chaîne par le groupe $[1]$, on parvient à englober dans cette chaîne ouverte tous les $(m-1)$ nombres inférieurs à m , on en conclura que m , s'il est de la forme $4h+1$, a les racines primitives 2 et -2 , ou l'une de ces racines primitives, s'il est de la forme $4h-1$.

C'est évident, car dans ce cas ce procédé n'est autre chose que la formation de la période du nombre 2 ou -2 . Comme on a

$$g^{m-1} \equiv 1, \quad g^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{m},$$

un groupe quelconque peut être représenté de la manière suivante :

$$g^l, \quad g^{-l}, \quad -g^{-l}, \quad -g^l.$$

Si $g = 2$ ou -2 , et l est un nombre indéterminé, on aura

$$2^l, \quad 2^{-l}, \quad -2^{-l}, \quad -2^l;$$

donc tous les termes sont compris dans la formule $\pm 2^{\pm l}$, et il est clair que si une chaîne englobe tous les $(m-1)$ nombres, 2 et -2 ou l'un de ces nombres est racine primitive, selon que m est de la forme $4h+1$ ou $4h-1$.

Pour m de la forme $4h-1$, si la chaîne est terminée par $[u]$, c'est 2 qui est la racine primitive, et si elle est terminée par $[v]$, c'est -2 .

En effet, si 2 est racine primitive, le dernier groupe sera

$$2^{\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{m-1-\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{\frac{m-1}{2}-\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{\frac{m-1}{2}+\frac{m-3}{4}}$$

ou

$$2^{\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{\frac{3m-1}{4}}, \quad 2^{\frac{m+1}{4}}, \quad 2^{\frac{3m-5}{4}}.$$

En le ramenant à la forme

$$2^{\frac{m-3}{4}}, \quad 2 \cdot 2^{\frac{3m-5}{4}}, \quad 2 \cdot 2^{\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{\frac{3m-5}{4}},$$

on voit que le troisième terme est le double du premier, et le deuxième terme est le double du quatrième, de sorte que ce groupe appartient à la forme $[u]$. Au contraire, si la chaîne est terminée par le groupe $[v]$, cela indiquera que 2 n'est pas une ra-

cine primitive de m , et par conséquent c'est -2 qui l'est nécessairement.

Ainsi le déploiement des nombres en chaîne permet de déterminer rapidement, si le module proposé a les racines primitives 2 et -2 ou l'une de ces racines.

Éclaircissons ceci par quelques exemples :

1^o Soit $m = 61 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, de la forme $4h + 1$. En commençant par le groupe (1), on formera la chaîne

1, 1, 60, 60;	2, 31, 30, 59;	4, 46, 15, 57;
8, 23, 38, 53;	16, 42, 19, 45;	32, 21, 40, 29;
3, 41, 20, 58;	6, 51, 10, 55;	12, 56, 5, 49;
24, 28, 33, 37;	48, 14, 47, 13;	35, 7, 54, 26;
9, 34, 27, 52;	18, 17, 44, 43;	36, 39, 22, 25;
11, 50, 11, 50,		

qui est terminée par le groupe $[\omega]$ et contient tous les soixante nombres inférieurs au module 61. Donc, comme ce module est de la forme $4h + 1$, il a les racines primitives 2 et $-2 \equiv 59$.

2^o Soit $m = 67 = 2 \cdot 3 \cdot 11 + 1$, de la forme $4h - 1$. En commençant par le groupe (1), on formera la chaîne :

1, 1, 66, 66;	2, 34, 33, 65;	4, 17, 50, 63;
8, 42, 25, 59;	16, 21, 46, 51;	32, 44, 23, 35;
64, 22, 45, 3;	61, 11, 56, 6;	55, 39, 28, 12;
43, 53, 14, 24;	19, 60, 7, 48;	38, 30, 37, 29;
9, 15, 52, 58;	18, 41, 26, 49;	36, 54, 13, 31;
5, 27, 40, 62;	10, 47, 20, 57,	

qui est terminée par le groupe $[u]$; donc 67 a la racine primitive 2.

3^o Soit $m = 71 = 2 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, de la forme $4h - 1$. On aura la chaîne

1, 1, 70, 70;	2, 36, 35, 69;	4, 18, 53, 67;
8, 9, 62, 63;	16, 40, 31, 55;	32, 20, 51, 39;
64, 10, 61, 7;	57, 5, 66, 14;	43, 38, 33, 28;
15, 19, 52, 56;	30, 45, 26, 41;	60, 58, 13, 11;
49, 29, 42, 22;	27, 50, 21, 44;	54, 25, 46, 17;
37, 48, 23, 34;	3, 24, 47, 68;	6, 12, 59, 65;

qui est terminée par le groupe $[\nu]$; donc 71 a la racine primitive — 2 $\equiv$ 69.

6. Le déploiement en chaîne des groupes de nombres associés et contre-associés permet en même temps de reconnaître les résidus de tous les degrés et toutes les racines primitives.

Pour $m = 4h + 1$, les termes 1 et — 1 du groupe initial [1] étant résidus de tous les degrés, il s'ensuit que les groupes des rangs impairs 1, 3, 5, 7, ... seront composés de résidus quadratiques. Tels sont, pour $m = 61$, les groupes

1, 1, 60, 60; 4, 46, 15, 57; 16, 42, 19, 45;
3, 41, 20, 58; 12, 56, 5, 49; 48, 14, 47, 13;
9, 34, 27, 52; 36, 39, 22, 25.

Comme pour ce module on a $m - 1 = 60 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, il y aura encore les résidus de degrés impairs 3 et 5. Les groupes composés de résidus du troisième degré occupent les rangs 1, 4, 7, 10, ... Tels sont les groupes

1, 1, 60, 60; 8, 23, 38, 53; 3, 41, 20, 58;
24, 28, 33, 37; 9, 34, 27, 52; 11, 50, 11, 50.

Les groupes composés des résidus du cinquième degré occupent les rangs 1, 6, 11, 16. Tels sont les groupes

1, 1, 60, 60; 32, 21, 40, 29;
48, 14, 47, 13; 11, 50, 11, 50.

Tous les autres groupes

2, 37, 30, 59; 6, 51, 10, 55;
35, 7, 54, 26; 18, 17, 44, 43,

sont composés de racines primitives.

Pour $m = 4h - 1$, les termes 1 et — 1 du groupe initial, étant aussi résidus de tous les degrés impairs, on déterminera ces derniers comme dans le cas précédent. Quant aux résidus quadratiques, il y a à considérer deux cas : 1° Si la racine primitive est — 2, les deux premiers termes de tous les groupes sont résidus quadratiques, et les deux derniers termes, tant qu'ils ne sont pas résidus d'aucun degré impair, sont racines primitives. Ainsi, pour

$m = 71$, les termes 2, 36; 4, 18; 8, 9; 16, 40; 32, 20; ... sont résidus quadratiques, tandis que les termes 35, 69; 53, 67; 62, 63; 31, 55; 61, 7; 33, 28; 52, 56; 31, 11; 42, 22; 21, 44; 47, 68; 59, 65 sont racines primitives. 2° Si la racine primitive est 2, les deux premiers et les deux derniers termes des groupes consécutifs sont à tour de rôle résidus quadratiques ou racines primitives, tant qu'ils ne sont pas résidus de degrés impairs. Ainsi, pour $m = 67$, les termes 33, 65; 4, 17; 25, 59; 16, 21; ... sont résidus quadratiques, tandis que les termes 2, 34; 50, 63; 46, 51; 32, 44; 61, 11; 28, 12; 7, 48; 18, 41; 13, 31; 20, 57 sont racines primitives.

7. Si la chaîne, commencée par le groupe [1], s'arrête sans avoir englobé tous les $(m - 1)$ nombres, il faut déployer en d'autres chaînes les nombres qui ne sont pas entrés dans la première chaîne. Pour cela, on n'a pas besoin de faire de longs calculs pour déterminer deux nombres associés, car on trouvera toujours dans la première chaîne deux termes associés ou contre-associés qui, par l'échange de leurs facteurs, donneront deux nouveaux termes associés ou contre-associés, qui serviront à la formation d'une chaîne nouvelle. Par exemple, pour $m = 151$, la chaîne, commencée par le groupe [1], contient le groupe

$$32, \quad 118, \quad 33, \quad 119,$$

sans contenir le terme 3. On trouvera le groupe contenant ce dernier, en divisant par 11 le terme 33 et en multipliant par le même facteur son contre-associé 32; on aura ainsi le groupe

$$3, \quad 101, \quad 50, \quad 148,$$

qui servira à la formation d'une seconde chaîne.

Après avoir déployé en chaînes tous les $(m - 1)$ nombres, on écartera celles qui sont composées entièrement de résidus.

On n'aura en général que deux ou trois chaînes et rarement plus de six. Pour $m = 4h - 1$ on n'aura qu'une seule chaîne ouverte et quelques chaînes fermées, et ce ne sont que ces dernières qui peuvent contenir des racines primitives. Pour $m = 4h + 1$ et h impair, comme nous l'avons déjà dit au n° 4, il y aura aussi une seule chaîne ouverte et quelques chaînes fermées; et si h est pair,

on aura deux chaînes ouvertes, et dans ce cas, s'il n'y a pas de chaînes fermées, c'est la chaîne ouverte, terminée par les groupes $[u]$ et $[v]$, qui contiendra toutes les racines primitives; autrement ces dernières se trouveront dans des chaînes fermées.

Il est très aisé de reconnaître et d'exclure les résidus dans une chaîne ouverte, terminée par $[u]$ et $[v]$, car le groupe central de ces chaînes est composé de résidus de tous les degrés impairs, et les groupes composés de résidus d'un degré impair quelconque sont disposés à des distances égales, marquées par l'exposant de ce degré. Après cette exclusion, les groupes qui resteront contiendront les racines primitives.

Quant aux chaînes fermées, qui n'ont pas de groupe central, on reconnaîtra les groupes composés de résidus d'après de certains caractères que nous allons signaler. Remarquons d'abord que, si le nombre de termes d'une chaîne fermée n'est pas divisible par un des facteurs de $(m - 1)$, cette chaîne ne contiendra pas un seul résidu du degré dont l'exposant est marqué par ce facteur, ou bien tous ses termes seront résidus de ce degré.

Par exemple, pour $m = 127 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 + 1$, on a quatre chaînes fermées, chacune de 28 termes; ce nombre n'étant pas divisible par le facteur 3, et comme il y a $\frac{126}{3} = 42$ résidus de troisième degré, une de ces chaînes, ainsi que la chaîne ouverte qui a 14 termes, est composée entièrement de résidus du troisième degré. On reconnaîtra facilement cette chaîne fermée, car on y trouve le cube 27.

Il y a des cas, pour les modules de la forme $4h + 1$, où une chaîne fermée est composée entièrement de racines primitives. Cela arrive quand 2 et -2 sont résidus de tous les degrés dont les exposants sont facteurs de $(m - 1)$.

Par exemple, pour $m = 433 = 2^4 \cdot 3^3 + 1$, il y a une chaîne fermée de 144 termes qui sont tous racines primitives de 433.

8. Les exemples suivants, pris parmi les cas les plus simples, suffiront à éclaircir l'application de notre procédé à la recherche des racines primitives :

1. Si m est de la forme $2n^c + 1$, où n est un nombre premier impair et c est un nombre entier quelconque, tous les résidus

du degré impair n seront contenus dans la chaîne ouverte, commencée par le groupe [1], de sorte que, pour trouver les racines primitives, on n'aura qu'à séparer les non-résidus quadratiques, qui seront tous racines primitives.

En effet, dans ce cas, 2 et -2 , ne pouvant pas être simultanément résidus quadratiques, car m est de la forme $4h - 1$, sont nécessairement résidus du degré impair n .

Prenons une racine primitive quelconque g et posons $2 \equiv g^k$. L'exposant k doit contenir le facteur n , et comme tous les termes de la chaîne, commencée par [1], sont de la forme $\pm 2^{\pm l}$, cette forme deviendra $\pm (g^k)^{\pm l} \equiv \pm g^{\pm kl}$, et, l'exposant kl contenant le facteur n , tous les termes de la chaîne seront résidus du degré n .

Par exemple, pour $m = 251 = 2 \cdot 5^3 + 1$, la chaîne ouverte, commencée par [1], contient tous les 50 résidus du cinquième degré, de sorte que tous les autres nombres, en dehors de cette chaîne, sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives. Ainsi le non-résidu $251 - 15^2 = 26$ est racine primitive de 251.

II. *Pour $m = 4n^c + 1$, où n est un nombre premier impair et c un nombre entier quelconque, la chaîne ouverte contiendra également tous les résidus du degré n .*

En effet, dans ce cas m n'étant pas de la forme $8h + 1$, les nombres 2 et -2 ne sont pas résidus quadratiques, et par conséquent ils sont résidus du degré n .

Par exemple, pour $m = 109 = 2^2 \cdot 3^3 + 1$, la chaîne ouverte, commencée par [1], englobe tous les 36 résidus du troisième degré, et tous les non-résidus quadratiques qui n'entrent pas dans cette chaîne sont racines primitives. A l'aide de la proposition que nous avons donnée au numéro 1, on trouve que 11 est non-résidu quadratique de 109; par conséquent ce nombre et son associé 10 sont racines primitives de ce module.

III. *Pour les modules de la forme $m = 6N + 1$, où N est un nombre quelconque, premier ou composé, pair ou impair, il y a un groupe dont deux termes associés diffèrent d'une unité*

avec deux autres termes associés, et tous ces termes sont résidus de tous les degrés marqués par les facteurs du nombre N .

Cette proposition permettra de reconnaître facilement les résidus et les racines primitives dans les chaînes fermées, si l'on y trouve un groupe de cette espèce.

En représentant ce groupe par

$$a, \quad b, \quad a+1, \quad b+1$$

et en appelant *termes mineurs* les termes a et b et *termes majeurs* les termes $(a+1)$ et $(b+1)$, on démontrera sans peine :

1° Que le carré d'un terme mineur est congru à son associé et celui d'un terme majeur est congru à son contre-associé, de sorte qu'on aura

$$a^2 \equiv b, \quad b^2 \equiv a, \quad (a+1)^2 \equiv a, \quad (b+1)^2 \equiv b, \quad \dots \pmod{m};$$

2° Que le cube d'un terme mineur est congru à 1, et celui d'un terme majeur est congru à -1 . Ainsi l'on aura

$$a^3 \equiv 1, \quad b^3 \equiv 1, \quad (a+1)^3 \equiv -1, \quad (b+1)^3 \equiv -1, \quad \dots \pmod{m};$$

3° Que si g est une racine primitive quelconque, le groupe de cette espèce sera représenté de la manière suivante

$$g^N, \quad g^{2N}, \quad g^{3N}, \quad g^{4N}.$$

Par exemple, pour $m = 223 \equiv 6.37 + 1$ et $N = 37$, on a le groupe

$$184, \quad 40, \quad 183, \quad 39$$

qui peut être représenté ainsi

$$g^{37}, \quad g^{185}, \quad g^{74}, \quad g^{148};$$

4° Que si N est un nombre premier, on aura deux chaînes : la chaîne ouverte englobera tous les résidus du troisième degré, tandis que la chaîne circulaire contiendra un groupe $a, b, a+1, b+1$, composé de quatre résidus du degré N , les deux autres résidus de ce degré étant les termes 1 et -1 de la chaîne ouverte.

Par exemple, pour $m = 31 = 6.5 + 1$, on a deux chaînes :

$$\begin{array}{ll} \text{A.} & 1, \quad 1, \quad 30, \quad 30; \quad 2, \quad 16, \quad 15, \quad 29; \quad 4, \quad 8, \quad 23, \quad 27. \\ \text{B.} & \left\{ \begin{array}{ll} 3, \quad 21, \quad 10, \quad 28; & 6, \quad 26, \quad 5, \quad 25; \\ 12, \quad 13, \quad 18, \quad 19; & 24, \quad 22, \quad 9, \quad 7; \quad 17, \quad 11, \quad 20, \quad 14. \end{array} \right. \end{array}$$

Les dix termes de la chaîne A sont résidus du troisième degré, et les termes 6, 26, 5, 25 de la chaîne B sont résidus du cinquième degré, et comme le module 31 est de la forme $12h - 5$, le nombre 3 est non-résidu quadratique, et par conséquent il est racine primitive, ainsi que son associé 21 et les deux premiers termes de tous les groupes de la chaîne B, excepté 6 et 26, qui sont résidus du cinquième degré.

Généralement, pour $m = 4h - 1$, si h est pair, comme cela a lieu pour $m = 31 = 4 \cdot 8 - 1$, ce sont tous les premiers ou tous les derniers termes des groupes qui sont racines primitives, sauf ceux qui sont résidus de degrés impairs, et au contraire, si h est impair, ce sont, à tour de rôle, les premiers et les derniers termes des groupes consécutifs qui sont racines primitives, comme cela a lieu pour $m = 43 = 4 \cdot 11 + 1$.

C'est d'après les caractères que nous venons de signaler et quelques autres moins saillants, que l'on reconnaîtra dans des chaînes fermées les résidus de tous les degrés. Après les avoir éliminés, on aura les racines primitives. Il est facile d'appliquer ce procédé aux modules de toutes les formes, telles que $m = 8n + 1$, $12n + 1$, ... et à d'autres, où le nombre $(m - 1)$ contient plusieurs facteurs différents, mais nous ne le ferons pas pour ne pas sortir des limites assignées à ce Mémoire. Il nous semble que ce procédé permettra de découvrir les racines primitives, ainsi que les résidus de tous les degrés, beaucoup plus rapidement que les méthodes dont nous avons parlé au n° 1.

9. Pour compléter ce Mémoire, disons quelques mots d'un autre procédé, mentionné par quelques auteurs, qui permet de découvrir sans essais les racines primitives des modules de la forme $4h - 1$. Ce procédé est fondé sur le théorème suivant :

Pour tout module $m = 4h - 1$, si l'on multiplie deux nombres complémentaires à m , tels que a et $m - a \equiv -a$, le produit $a(m - a) \equiv -a^2$ sera racine primitive, dans le cas où l'un de ces nombres est racine primitive.

En effet, soit g une racine primitive de m et $a \equiv g^k$; en changeant les signes on aura $-a \equiv -g^k \equiv g^{\frac{m-1}{2} + k}$, et en multi-

pliant ces deux congruences on trouvera $-a^2 \equiv g^{\frac{m-1}{2} + sk}$.

Si a est racine primitive, l'exposant k est premier avec $m-1$, et comme $\frac{m-1}{2} = 2h-1$ n'a pas de facteur 2, l'exposant $\frac{m-1}{2} + 2k$ sera aussi premier avec $(m-1)$, et par conséquent le produit $a(m-a) \equiv -a^2$, que nous désignerons par a_1 , sera également racine primitive de m .

En répétant cette opération jusqu'à ce qu'on retrouve l'un des nombres initiaux a ou $(m-a) \equiv -a$, on aura une suite de produits

$$-a^2 \equiv a_1, \quad -a_1^2 \equiv a_2, \quad -a_2^2 \equiv a_3, \quad \dots, \quad -a_i^2 \equiv \pm a.$$

Dans ce cas, aucun des nombres $a_1, a_2, a_3, \dots$ ne sera associé d'aucun autre nombre de cette suite. C'est évident, car en prenant deux termes quelconques de cette suite

$$a_i \equiv -g^{2^i k}, \quad a_j \equiv -g^{2^j k},$$

et en les multipliant, on aura

$$a_i a_j \equiv g^{(2^i + 2^j)k}.$$

Comme k est premier avec $(m-1)$, le produit $(2^i + 2^j)k$ ne peut pas être égal à $m-1 \equiv 0$, et par conséquent la congruence a_i et $a_j \equiv g^{m-1} \equiv 1$ est impossible. Donc, les termes a_i et a_j ne peuvent pas être associés entre eux. Soit b l'associé de a . Formons sa suite

$$-b^2 \equiv b_1, \quad -b_1^2 \equiv b_2, \quad -b_2^2 \equiv b_3, \quad \dots, \quad -b_i^2 \equiv \pm b.$$

Ces nombres $b_1, b_2, b_3, \dots$ seront respectivement associés de $a_1, a_2, a_3, \dots$. Donc les racines primitives sont toujours réparties entre une ou plusieurs paires de suites.

Éclaircissons ceci par un exemple. Soit $m = 43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$.

En commençant par n'importe quels nombres, on aura cinq suites :

$$\begin{aligned}
 \text{A.} \quad & 2.41 \equiv 39, \quad 39.4 \equiv 27, \quad 27.16 \equiv 2. \\
 \text{B.} \quad & 22.21 \equiv 32, \quad 32.11 \equiv 8, \quad 8.35 \equiv 22. \\
 \text{C.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} 3.40 \equiv 34, \quad 34.9 \equiv 5, \quad 5.38 \equiv 18, \\ 18.25 \equiv 20, \quad 20.23 \equiv 30, \quad 30.13 \equiv 3. \end{array} \right. \\
 \text{D.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} 29.14 \equiv 19, \quad 19.24 \equiv 26, \quad 26.17 \equiv 12, \\ 12.31 \equiv 28, \quad 28.15 \equiv 33, \quad 33.10 \equiv 29. \end{array} \right. \\
 \text{E.} \quad & 6.37 \equiv 8, \quad 7.36 \equiv 37.
 \end{aligned}$$

Comme 43 a 12 racines primitives, il est clair qu'elles forment les suites C et D et sont

$$34, 5, 18, 20, 30, 3; \quad 19, 26, 12, 28, 33, 39.$$

Pour $m = 211 = 2.3.5.7 + 1$, il y a 48 racines primitives, qui se répartissent entre quatre suites de 12 produits. Mais ce procédé est moins expéditif que le procédé général exposé plus haut.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Henri Fleury, présenté par MM. Delannoy et D. André; M. Lecornu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et L. Lévy; M. Gaston Martin et M. Amédée Wagner, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Guyou : *Sur les équations du clapotis.*

M. Kœnigs : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Kœnigs : *Sur les aires des podaires d'une courbe fermée convexe et de sa développée, prises par rapport au même point.*

M. Humbert : *Sur les surfaces représentables point par point sur le plan.*

M. Humbert : *Sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques.*

M. Touche fait la Communication suivante :

Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique.

Pour établir l'équation de continuité en Hydraulique, on considère un petit parallélépipède rectangle MCFBAEGD dont le sommet est M.

Soit v , la vitesse en M de la trajectoire fluide qui passe par ce point à l'instant t . Appelons P le plan osculateur de cette trajectoire et P' un plan perpendiculaire au plan P et passant par le premier élément de trajectoire.

Appelons s une longueur de trajectoire comptée à partir du point M, s' une longueur comptée à partir du même point, sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et tangente à leurs plans osculateurs, s'' une longueur comptée sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et normale à leurs plans osculateurs; ds sera un élément de trajectoire, ds' un élément de normale principale à la trajectoire et ds'' un élément de binormale.

Soient a, a', a'' les cosinus directeurs de ds ; b, b', b'' ceux de ds' , et c, c', c'' ceux de ds'' .

Nous nous proposons de développer les trois derniers termes de l'équation de continuité. Pour cela, nous commençons par y remplacer u, v et w par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' . Pour développer le premier terme du trinôme ainsi obtenu, nous considérons le plan P qui contient l'élément ds ; nous abaissons, du sommet A du petit parallélépipède, une perpendiculaire sur le plan P. Du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur ds . Nous faisons une transformation de coordonnées; nous avons les axes coordonnés suivant MA, MB, MC; après la transformation, nous les avons suivant ds, ds' et ds'' . Alors, en remarquant que l'on a $\frac{ds}{dx} = a, \frac{ds'}{dx} = b, \frac{ds''}{dx} = c$, nous obtenons

$$a^2 v_1 \frac{d\rho}{ds} + abv_1 \frac{d\rho}{ds'} + acv_1 \frac{d\rho}{ds''}$$

pour la dérivée de ρav_1 par rapport à x en ne faisant varier que ρ . Nous obtenons de même la dérivée de ρav_1 par rapport à x en ne

faisant varier que v_1 , puis sa dérivée en ne faisant varier que a . Cette dernière dérivée contient $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ que nous allons remplacer par d'autres quantités.

A partir du point M, considérons l'élément ds' ; au point M l'élément de trajectoire est ds ; soit $d\sigma$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds' ; projetons ce dernier élément sur le plan P; appelons $\delta\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta\beta$ l'angle formé par l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan P.

A partir du même point M, considérons l'élément ds'' ; au point M l'élément de trajectoire est ds ; soit $d\sigma'$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds'' ; projetons ce dernier élément sur le plan P'; appelons $\delta'\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta'\beta'$ l'angle formé par l'élément $d\sigma'$ avec sa projection sur le plan P'.

La considération de triangles sphériques nous donne

$$\begin{aligned}\frac{da}{ds'} &= -b \frac{\partial\alpha}{ds'} - c \frac{\partial\beta}{ds'}, \\ \frac{da}{ds''} &= -c \frac{\delta'\alpha}{ds''} - b \frac{\delta'\beta'}{ds''}.\end{aligned}$$

Nous remplaçons $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ par ces valeurs dans la dernière dérivée partielle considérée.

Pour développer le deuxième terme du trinôme, nous considérons toujours le plan P qui contient l'élément ds ; mais, au lieu de considérer, comme précédemment, le sommet A du petit parallélépipède, nous considérons le sommet B. De ce sommet, nous abaissons une perpendiculaire sur le plan P; du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur l'élément ds . A la suite d'un changement d'axes coordonnés, nous obtenons la dérivée de $\rho a'v_1$ par rapport à y , en faisant varier successivement ρ , v_1 et a' ; la dérivée partielle par rapport à a' contient $\frac{da'}{ds'}$ et $\frac{da'}{ds''}$ que nous remplaçons par des fonctions de $\frac{\partial\alpha}{ds'}$, $\frac{\delta'\alpha}{ds''}$, $\frac{\partial\beta}{ds'}$, $\frac{\delta'\beta'}{ds''}$ par la considération de triangles sphériques.

Pour développer le troisième terme, nous considérons le sommet C du petit parallélépipède.

Le développement du deuxième et celui du troisième peuvent s'obtenir au moyen de celui du premier, en y remplaçant $a, b, c, \frac{da}{ds}$ par $a', b', c', \frac{da'}{ds}$ pour le second et par $a'', b'', c'', \frac{da''}{ds}$ pour le troisième.

Le trinôme ainsi développé a trente-trois termes qui se réduisent à quatre et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + v_1 \frac{d\rho}{ds} + \rho \frac{dv_1}{ds} - \rho v_1 \frac{\partial x}{\partial s} - \rho v_1 \frac{\delta' x}{\delta s} = 0.$$

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité : M. Burkhardt, présenté par MM. J. Tannery et Königs; M. Lancelin, présenté par MM. Laisant et Chailan.

Communications :

M. Fouret : *Sur le théorème des aires dans le mouvement d'un point matériel.*

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre et sur la fonction θ à plusieurs variables.*

M. DÉSIRÉ ANDRÉ communique le théorème suivant : *Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres.*

Si l'on désigne par σ_n la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, le rapport $\frac{\sigma_n}{n^2}$ a pour limite, lorsque n croît indéfiniment, la fraction $\frac{4}{9}$, c'est-à-dire le carré de la limite du rapport $\frac{s_n}{n}$, où s_n est la valeur moyenne des nombres de séquences.

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Sur les systèmes collinéaires.

1. Étant données deux ponctuelles superposées projectives u

et u_1 , au point M de u correspond le point M_1 de u_1 ; au point M_1 de u correspond le point M_2 de u_1 ; et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite indéfinie de points $M, M_1, M_2, \dots, M_i$.

M. Émile Weyr a démontré que, lorsque i augmente indéfiniment, le point M_i a pour limite un des points doubles des deux ponctuelles, à la condition que ces points soient réels.

Ce théorème s'étend évidemment aux autres formes de première espèce et, plus généralement, à deux formes élémentaires quelconques supposées et projectives.

Je me propose dans cette Note de l'étendre aux formes projectives de deuxième et de troisième espèce.

2. Soient Σ et Σ_1 deux systèmes plans supposés et collinéaires; ces deux systèmes ont trois points doubles, E, F, G , que nous supposerons réels. Les points homologues des deux plans sur la droite EF forment deux ponctuelles projectives dont les éléments doubles sont les points E et F ; ces ponctuelles seront parfaitement déterminées si nous nous donnons la quantité λ'' , valeur constante du rapport anharmonique formé par les points E et F et par deux points de cette droite, homologues dans les deux systèmes plans Σ et Σ_1 . Les quantités λ et λ' déterminent de la même façon les deux ponctuelles homologues situées sur les côtés FG et GE du triangle EFG . Ces trois quantités ne sont pas arbitraires; elles sont liées par la relation nécessaire

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Si le triangle EFG est donné, ainsi que deux des quantités λ, λ' et λ'' par exemple, la collinéation des deux systèmes plans sera parfaitement déterminée. Soit M , en effet, un point quelconque de Σ ; joignons FM et GM qui coupent respectivement les droites GE et EF aux points φ et γ ; déterminons sur ces mêmes droites deux points φ_1 et γ_1 , par les égalités anharmoniques

$$(1) \quad (GE\varphi\varphi_1) = \lambda'.$$

$$(2) \quad (EF\gamma\gamma_1) = \lambda''.$$

Le point M_1 , commun aux droites $F\varphi_1$ et $G\gamma_1$, sera évidemment l'homologue de M dans le système Σ_1 .

Ceci posé, supposons qu'au point M_i de Σ corresponde le point M_1 de Σ_1 ; au point M_2 de Σ , le point M_2 de Σ_1 ; et ainsi de suite. On obtient, par ces opérations successives, une suite indéfinie de points $M, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$. Proposons-nous de déterminer la position limite du point M_i , lorsque i augmente indéfiniment. Les droites FM_i et GM_i coupant respectivement les côtés GE et EF aux points φ_i et γ_i , nous avons les relations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} (GE\varphi_1) = \lambda', \\ (GE\varphi_1\varphi_2) = \lambda', \\ \dots\dots\dots \\ (GE\varphi_{i-1}\varphi_i) = \lambda'. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} (EF\gamma_1) = \lambda'', \\ (EF\gamma_1\gamma_2) = \lambda'', \\ \dots\dots\dots \\ (EF\gamma_{i-1}\gamma_i) = \lambda''. \end{cases}$$

Multiplions membre à membre toutes les égalités (3) et toutes les égalités (4); nous obtenons ainsi les deux relations suivantes :

$$(GE\varphi_i) = \lambda'^i, \quad (EF\gamma_i) = \lambda''^i.$$

Supposons que les deux quantités λ' et λ'' soient différentes de l'unité; plusieurs cas peuvent alors se présenter.

Premier cas : $\lambda' > 1, \lambda'' > 1$. Les deux quantités λ'^i et λ''^i augmentent indéfiniment avec i , les points φ_i et γ_i tendent respectivement vers les points E et F ; le point M_i a alors le point F comme limite.

Deuxième cas : $\lambda' < 1, \lambda'' < 1$. Les quantités λ'^i et λ''^i tendent vers zéro; les points φ_i et γ_i ayant alors pour positions limites les points G et E , le point M_i tend vers le point G .

Troisième cas : $\lambda' > 1, \lambda'' < 1$. Alors φ_i et γ_i tendant vers le même point E , ce point est aussi la limite du point M_i .

Quatrième cas : $\lambda' < 1, \lambda'' > 1$. Dans ce cas, le point M_i tendra vers l'un des deux points G ou F , suivant que λ sera plus grand ou plus petit que 1.

Si $\lambda = 1$, on voit immédiatement que les deux systèmes plans Σ et Σ_1 sont homologues; le point E étant le centre, et FG l'axe

d'homologie. La position limite du point M est alors, suivant la valeur de λ' , soit le point E , soit le point d'intersection ϵ de EM avec FG . Un cas particulier correspond aux valeurs $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$, $\lambda'' = -1$; les deux systèmes homologues sont alors en involution, et, deux points homologues M et M_i se correspondant doublement, la suite indéfinie des points M_i se compose de ces deux points se reproduisant périodiquement.

Enfin il est impossible que deux des quantités λ , λ' et λ'' soient égales à 1; car les deux systèmes Σ et Σ_i coïncideraient dans leur ensemble.

Nous voyons, en résumé, que, si le triangle des points doubles est réel, le point M_i tend toujours vers l'un des sommets de ce triangle.

Ce théorème s'étend immédiatement aux autres formes de seconde espèce, par exemple à deux gerbes concentriques collinéaires, et aux cordes d'une même cubique gauche se correspondant homographiquement.

3. Le théorème analogue pour la forme fondamentale de troisième espèce se démontrerait de la même façon que dans le paragraphe 2. Nous en donnerons seulement l'énoncé : *Soient deux espaces collinéaires Σ et Σ_i ayant leurs quatre points doubles réels et formant un tétraèdre $EFGH$. Au point M de Σ correspond un point M_i de Σ_i ; au point M_i de Σ correspond un point M_2 de Σ_i ; et ainsi de suite. On forme ainsi une série indéfinie de points $M, M_i, M_2, \dots, M_i, \dots$. Le point M_i tend, lorsque i augmente indéfiniment, vers l'un des sommets du tétraèdre $EFGH$.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur des couples de surfaces applicables;

par M. TH. CARONNET.

1. Étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la distance M_1M_2 des points correspondants varie en général avec la position de ces points sur les surfaces qu'ils décrivent.

Nous nous sommes demandé s'il existait des couples de surfaces applicables pour lesquelles cette distance fût constante. La solution de cette question, que nous donnons ici, montre que notre hypothèse était plausible; il existe, en effet, des surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants est invariable.

Ces surfaces peuvent se diviser en deux groupes. Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface du premier groupe dépendent de deux fonctions arbitraires d'arguments différents.

Les surfaces du second groupe sont réglées et se correspondent par génératrices parallèles et de même sens; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même argument.

Au point de vue de la déformation, ce dernier résultat n'est pas nouveau; M. Beltrami a montré effectivement qu'il existe toujours deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre et dans lesquelles les génératrices correspondantes sont parallèles et de même sens ⁽¹⁾.

2. Soient deux surfaces (M_1) , (M_2) applicables l'une sur l'autre et telles que la distance $M_1 M_2$ des points correspondants soit constante et égale à l .

Appelons $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ les coordonnées des points M_1, M_2 ; x, y, z celles du milieu O de la droite qui les joint, et ξ, η, ζ les cosinus directeurs de cette droite.

Nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} x_1, y_1, z_1 = x, y, z + (\xi, \eta, \zeta) \frac{l}{2}, \\ x_2, y_2, z_2 = x, y, z - (\xi, \eta, \zeta) \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Les deux surfaces en question étant applicables l'une sur l'autre, il vient

$$\int dx_1^2 = \int dx_2^2,$$

ou bien

$$(2) \quad \int dx d\xi = 0.$$

⁽¹⁾ Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Troisième Partie, p. 298.

Par conséquent, la surface lieu du milieu O correspond à la sphère par orthogonalité des éléments; et, après avoir posé

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad \eta = i \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad \zeta = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta},$$

nous aurons

$$(3) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(4) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

$$(5) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + S \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0.$$

Les équations (3) et (4) s'écrivent encore

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + i(1 + \beta^2) \frac{\partial y}{\partial \alpha} - 2\beta \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(1 - \alpha^2) \frac{\partial x}{\partial \beta} - i(1 + \alpha^2) \frac{\partial y}{\partial \beta} - 2\alpha \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

et nous donnent après intégration

$$(3)' \quad (1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y - 2\beta z = B(\beta),$$

$$(4)' \quad (1 - \alpha^2)x - i(1 + \alpha^2)y - 2\alpha z = A(\alpha).$$

Quant à l'équation (5), on peut l'écrire

$$S \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} S x \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} S x \frac{\partial \xi}{\partial \alpha},$$

ou bien, en tenant compte des équations (3)' et (4)' qui permettent d'exprimer le second membre exclusivement en fonction de α et de β ,

$$(5)' \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - \beta)x + i(\beta - \alpha)y - (1 - \alpha\beta)z \\ = \frac{(1 + \alpha\beta)}{4} (A' + B') - \frac{\beta}{2} A - \frac{\alpha}{2} B. \end{array} \right.$$

Les coordonnées x, y, z de tout point de la surface (O) seront donc fournies par les trois équations linéaires (3)', (4)' et (5)'.

Les formules (1) feront connaître ensuite les surfaces (M_1) et (M_2).

La recherche des surfaces focales de la congruence rectiligne

(M, M₂) présente quelque intérêt. Examinons donc comment sont distribués les points focaux sur la droite M, M₂.

Nous avons pour les coordonnées d'un point quelconque de la droite M, M₂,

$$X, Y, Z = x, y, z + (\xi, \eta, \zeta)\rho.$$

Les développables de la congruence sont définies par l'équation qu'on obtient en éliminant ρ entre les équations

$$\frac{dx + \rho d\xi}{\xi} = \frac{dy + \rho d\eta}{\eta} = \frac{dz + \rho d\zeta}{\zeta},$$

ce qui donne, en ayant égard à l'identité (2),

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

ou

$$dx d\beta = 0.$$

Les développables en question correspondent donc aux génératrices rectilignes de la sphère, et nous avons pour les ρ des points focaux

$$\rho_1 = - \frac{S \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}{S \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}, \quad \rho_2 = - \frac{S \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{S \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}.$$

L'équation (5) nous montre d'ailleurs que l'on a

$$\rho_2 = - \rho_1;$$

par conséquent, les points focaux sont équidistants du milieu O.

3. Dans l'analyse précédente, nous avons supposé dès le début, en partant de l'identité (2), que les droites M, M₂ étaient susceptibles d'avoir une direction quelconque, c'est-à-dire que le point (ξ, η, ζ) pouvait occuper toute position sur la sphère de rayon unité; il convient maintenant d'étudier le cas où ce point décrit seulement une courbe sphérique $\beta = f(\alpha)$. La surface (O) qui correspond à cette courbe par orthogonalité des éléments sera nécessairement une développable.

D'ailleurs, l'équation (2) nous donne

$$S \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0,$$

$$S \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

et, en reprenant le calcul indiqué plus haut pour la recherche des développables de la congruence (M_1, M_2) , on voit que les développables d'une famille sont données par $\beta = \text{const.}$ Elles correspondent donc aux génératrices de la développable (O) . On reconnaît en outre aisément que les points focaux relatifs à ces développables coïncident avec les milieux O des segments M_1, M_2 .

Pour achever la question, considérons la surface (O) et rapportons-la aux courbes enveloppes ($v = \text{const.}$) des droites M_1, M_2 , et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$). Son élément linéaire sera de la forme

$$(6) \quad ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2.$$

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écriront

$$(M_1) \quad x_1, y_1, z_1 = x, y, z + \frac{l}{2A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u},$$

$$(M_2) \quad x_2, y_2, z_2 = x, y, z - \frac{l}{2A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u}.$$

- D'après l'hypothèse, les surfaces $(M_1), (M_2)$ étant applicables l'une sur l'autre, nous devons avoir l'identité

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2,$$

qui s'écrit, après substitutions,

$$\sum dx d\left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0.$$

Développons et annulons les coefficients de du^2 , de $du dv$ et de dv^2 ; nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ou finalement, après réductions,

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Par conséquent, l'élément linéaire (6) pourra s'écrire

$$(7) \quad ds^2 = du^2 + dv^2.$$

La surface focale (O) est donc une développable, comme nous l'indiquions plus haut, et les développables de la congruence (M, M₂) sont constituées par les plans tangents d'une part et les tangentes aux géodésiques $v = \text{const.}$ de cette surface d'autre part.

Remarquons que ces géodésiques coupent une même génératrice (g) de la surface (O) suivant le même angle; quand le point milieu (O) décrira la droite (g), les points M₁ et M₂ décriront dans le même sens deux droites (G₁) et (G₂) parallèles à (g) et équidistantes de cette dernière.

Il suit de là que les surfaces (M₁) et (M₂) sont réglées, qu'elles se correspondent par génératrices parallèles et de même sens.

Mais, comme le fait prévoir leur mode de génération, les surfaces réglées (M₁) et (M₂) ne sont pas quelconques; pour plus de précision, nous allons calculer les expressions de leurs coordonnées rectangulaires.

Soient

$$\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1, \\ y &= a_2 u + b_2, \\ z &= a_3 u + b_3 \end{aligned}$$

les coordonnées d'un point quelconque de la développable (O).

Nous pouvons toujours supposer

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 &= 1, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0; \end{aligned}$$

et la surface étant développable, nous aurons

$$\frac{a_1'}{b_1'} = \frac{a_2'}{b_2'} = \frac{a_3'}{b_3'} = -\frac{1}{z}.$$

Pour ramener l'élément linéaire de la surface (O) à la forme (7)

il faut effectuer les substitutions suivantes :

$$u' = u \cos(v + m) + \int x \sin(v + m) dv.$$

$$v' = u \sin(v + m) - \int x \cos(v + m) dv.$$

où m désigne une constante arbitraire.

Ceci posé, nous aurons pour les coordonnées du point M ,

$$x_1 = a_1 u + b_1 - \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$y_1 = a_2 u + b_2 - \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$z_1 = a_3 u + b_3 + \frac{\partial z}{\partial u},$$

ou bien

$$(M_1) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 u + b_1 + \frac{l}{2} [a_1 \cos(v + m) - a'_1 \sin(v + m)], \\ y_1 = a_2 u + b_2 + \frac{l}{2} [a_2 \cos(v + m) - a'_2 \sin(v + m)], \\ z_1 = a_3 u + b_3 - \frac{l}{2} [a_3 \cos(v + m) - a'_3 \sin(v + m)]. \end{cases}$$

Les coordonnées du point M_2 s'obtiendront en changeant l en $-l$ dans les expressions des coordonnées de M_1 .

Les surfaces réglées (M_1) et (M_2) dépendent donc des deux fonctions arbitraires qui définissent la développable (O) .

Sur les équations du clapotis; par M. E. Guyot.

Le seul mouvement oscillatoire des liquides dont on connaisse exactement les lois est celui de la *houle* dans des eaux de profondeur infinie. Je me propose de montrer que l'on peut exprimer également celles du mouvement connu sous le nom de *clapotis*.

M. Boussinesq a étudié ce phénomène dans le cas où la hauteur des ondes est petite relativement à leur longueur, et a donné des équations qui satisfont à une grande approximation à la condition de continuité et à celle de la surface libre.

Dans le mouvement exprimé par ces équations, de même que

dans la houle, les molécules appartenant à une même couche horizontale d'équilibre sont réparties à chaque instant sur le contour d'une trochoïde d'autant plus aplatie que la couche est plus profonde, et celles qui appartiennent à une même ligne verticale sont situées à l'extrémité de rayons parallèles des cercles générateurs.

Dans la houle, chaque molécule décrit son cercle d'un mouvement uniforme, de sorte que les ondes trochoïdales conservent la même forme et se transportent avec une vitesse constante.

Dans le clapotis, le rayon sur lequel se trouve chaque molécule reste parallèle à lui-même, et la molécule est animée sur sa direction d'un mouvement pendulaire. Il en résulte que, dans une demi-période, les couches de même profondeur prennent la forme de trochoïdes de plus en plus aplaties jusqu'à la forme rectiligne, et, dans la demi-période suivante, les trochoïdes se renversent, présentant leurs crêtes aux points où se trouvaient précédemment les creux et réciproquement. Chacune d'elles subit ainsi des déformations périodiques offrant une grande analogie avec celles des cordes vibrantes.

Les rayons sur lesquels oscillent les molécules ne restent pas immobiles. Il faut, en effet, que chaque trochoïde limite au-dessous d'elle un volume constant, et, par suite, que le centre du cercle générateur reste situé au-dessus de la couche de repos à une hauteur égale au quotient de la surface du cercle par la longueur de l'onde, c'est-à-dire à une hauteur proportionnelle au carré du rayon. Il résulte de là que, par rapport à des axes ayant pour origine la position de repos, et dirigés l'un verticalement et l'autre parallèlement au rayon de la molécule considérée, l'abscisse, c'est-à-dire le rayon, est proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée : la trajectoire est donc une parabole dont l'axe est vertical.

Ces résultats sont conformes à ceux qu'a obtenus M. Marey, par sa méthode chronophotographique, dans les expériences remarquables signalées à l'Académie le 1^{er} mai 1893.

L'accord entre les résultats de M. Boussinesq et ceux de l'expérience est si frappant qu'il était vraisemblable qu'une très petite modification aux lois données suffirait pour les amener à satisfaire rigoureusement aux conditions du problème. On y arrive, en effet,

en substituant une fonction elliptique à la fonction circulaire qui exprime le mouvement oscillatoire des molécules sur leurs rayons respectifs. Traduit géométriquement, le mouvement rectiligne, au lieu d'être celui de la projection d'un point qui décrit un cercle uniformément, est celui d'un point qui décrit le contour d'une ellipse avec une vitesse linéaire constante.

Si l'on désigne par X et Y les coordonnées horizontale et verticale de la position de repos d'une molécule, et par x et y celles de la position à un instant donné, dans le phénomène de la houle, on a les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x = X + r \sin \frac{2\pi}{L} X, \\ y = Y + r \cos \frac{2\pi}{L} X - \frac{\pi r^2}{L}. \end{cases}$$

L représente la longueur des ondes, r le rayon orbitaire correspondant à la profondeur Y ; celle-ci est mesurée à partir de la surface libre de repos. Enfin la valeur de r dépend du rayon R correspondant à la surface libre; la loi de cette dépendance s'exprime au moyen d'une variable auxiliaire z par les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} r = R e^{-\frac{2\pi}{L} z}, \\ z = Y + \frac{\pi R^2}{L} - \frac{\pi r^2}{L}, \end{cases}$$

où z représente la distance du centre orbitaire de la molécule considérée au centre orbitaire de la molécule superficielle appartenant à la même ligne verticale.

Il est facile de s'assurer que, dans la déformation résultant du passage des molécules des positions X, Y aux positions x, y , les éléments correspondants conservent la même surface, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dx}{dX} \frac{dy}{dY} - \frac{dx}{dY} \frac{dy}{dX} = 1,$$

et cela quelle que soit la valeur de R .

Par suite, on peut, dans le système d'équations (1) et (2), supposer que R est une fonction périodique arbitraire du temps sans que cette propriété cesse de subsister, et l'on aura ainsi un mou-

vement oscillatoire dans lequel la condition de continuité sera sans cesse vérifiée. Il ne reste donc plus qu'à choisir cette fonction telle que la surface libre reste surface de niveau, c'est-à-dire telle que la résultante de la pesanteur et de la force d'inertie des molécules superficielles soit normale à la surface libre.

Cette condition est exprimée par l'équation

$$\frac{dx}{dX} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dv}{dX} \left(g - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0,$$

les dérivées partielles étant prises pour la surface libre.

Or le mouvement des molécules superficielles est exprimé par les équations

$$\begin{aligned} x &= X + R \sin \frac{2\pi}{L} X, \\ y &= R \cos \frac{2\pi}{L} X - \frac{\pi R^2}{L}, \end{aligned}$$

dans lesquelles R est seule fonction du temps.

On obtient en effectuant les calculs

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + g \frac{2\pi R}{L} + \frac{4\pi^2}{L^2} \left(R \frac{dR^2}{dt^2} + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) = 0.$$

En multipliant par $2 \frac{dR}{dt}$, on obtient par une première intégration

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L} R^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} R^2 \frac{dR^2}{dt^2} = \text{const.}$$

Si l'on désigne par a la valeur maxima de R dans le mouvement, on doit avoir $R = a$ pour $\frac{dR}{dt} = 0$; par suite, la constante est

$$\frac{2\pi g a^2}{L},$$

et il vient

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L} (R^2 - a^2) + \frac{4\pi^2}{L^2} R^2 \frac{dR^2}{dt^2} = 0.$$

En posant

$$(3) \quad R = a \cos \varphi$$

et substituant, on trouve finalement

$$(4) \quad d\varphi \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 a^2}{L^2} \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{2\pi g}{L}} dt.$$

Par suite, les équations (1), (2), (3), (4) définissent un mouvement qui satisfait aux conditions cinématiques et dynamiques du problème.

En désignant par ρ le rayon du cercle dont le développement est égal à L , l'équation (4) devient

$$(5) \quad d\varphi \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{g}{\rho}} dt.$$

Considérons actuellement a comme le petit axe d'une ellipse ayant pour grand axe

$$a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}}.$$

Les coordonnées d'un point de cette ellipse peuvent être exprimées par

$$a \cos \varphi, \quad a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}} \sin \varphi;$$

le petit arc d'ellipse correspondant à $d\varphi$ a pour valeur

$$\begin{aligned} ds &= a \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

On a donc, d'après l'équation (5),

$$ds = a \sqrt{\frac{g}{\rho}} dt.$$

Par suite, le mouvement oscillatoire est celui de la projection sur le petit axe d'un point décrivant, avec une vitesse linéaire constante, le contour de cette ellipse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Laisant : *Un théorème général de Mécanique.*

M. Lancelin : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. d'Ocagne : *Un abaque général de la Trigonométrie sphérique.*

M. Carvallo : *Un théorème général de Statique.*

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force qui rencontre constamment deux droites fixes.*

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Sur un théorème de Laguerre.

Laguerre a proposé dans les *Nouvelles Annales* (QUESTION n° 1484) le problème suivant :

On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b ; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C' et C'' . Si l'on trace un cycle tangent à C, C' et C'' , démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique.

M. Laisant, dans son *Recueil de problèmes de Mathématiques*, reproduit cette même question comme n'ayant reçu aucune solution. Je me propose, dans cette Note, de démontrer élémentairement la propriété énoncée.

Soient u la droite donnée et e, f les deux points doubles des divisions homographiques déterminées par les trois couples de

points correspondants (a, b) , (a', b') et (a'', b'') . D'après une propriété connue, ces deux points e et f sont des points conjugués de l'involution I'' définie par les deux couples de points conjugués (a, b') et (b, a') . Ces points forment également un couple dans l'involution I' déterminée par les deux couples de points (a, b'') et (b, a'') . Pour construire les points doubles des deux divisions homographiques données, il suffit donc, d'après cette remarque, de déterminer le couple de points conjugués commun aux deux involutions I' et I'' . Ceci posé, le point central de l'involution I' est un point S' de la droite u déterminé par la relation métrique

$$S'a S'b'' = S'b S'a''.$$

Ce point S' est, d'après cette égalité, le centre de similitude des deux cycles C et C'' . Il s'ensuit que par un couple quelconque de points de l'involution I' on pourra faire passer un cycle tangent aux deux cycles C et C'' . Le point central de l'involution I'' étant de même le point S'' , centre de similitude des deux cycles C et C' , on pourra, par un couple de points de cette involution, mener un cycle tangent à C et à C' . Or, comme nous l'avons vu plus haut, les points e et f forment un couple de points conjugués commun aux deux involutions considérées. Il suit de là que, si par ces deux points nous menons un cycle Γ tangent au cycle C par exemple, ce cycle Γ sera également tangent à C' et à C'' . Les points doubles des deux divisions homographiques données s'obtiendront donc en prenant l'intersection de la droite u avec un des deux cycles Γ tangents aux trois cycles C , C' et C'' . Les deux cycles Γ que l'on peut ainsi construire sont symétriques par rapport à la droite u et la coupent aux deux mêmes points.

M. S. MANGEOT adresse la Communication suivante :

Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique.

On peut se demander quelles sont les surfaces U qui admettent toutes les surfaces de symétrie V d'une quadrique donnée W .

Le lieu des symétriques d'un point pris sur une surface U par rapport à toutes les surfaces V est une surface qui doit avoir une partie commune avec U . D'un autre côté, ce lieu est l'une des quadriques homothétiques et concentriques à W , car celles-ci

sont symétriques aussi par rapport aux surfaces V : donc la surface U est formée par une ou plusieurs de ces quadriques. Ainsi il n'existe pas d'autres surfaces ayant toutes les surfaces de symétrie d'une quadrique que les quadriques concentriques et homothétiques à celle-ci.

D'après les formules que j'ai fait connaître ⁽¹⁾ pour la détermination des surfaces de symétrie des quadriques, ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Les seules surfaces qui soient symétriques par rapport à chacune des surfaces de l'une des classes

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^a}{z^c}, \frac{y^b}{z^c}\right) &= 0, & \varphi\left(\frac{x^a}{e^z}, \frac{y^b}{e^z}\right) &= 0, \\ \varphi\left(x, \frac{y^b}{z^c}\right) &= 0, & \varphi\left(x, \frac{y^b}{e^z}\right) &= 0 \end{aligned}$$

sont respectivement les quadriques

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= \lambda, & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z &= \lambda, \\ \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= \lambda, & \frac{y^2}{b} + 2z &= \lambda; \end{aligned}$$

a, b, c désignant trois nombres donnés, λ un paramètre et φ une fonction arbitraire.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines fonctions analytiques d'une variable complexe.*

M. Fourret : *Sur un mode de génération du complexe linéaire.*

⁽¹⁾ Thèse de doctorat. Gauthier-Villars, 1890.

M. Touche : *Du mouvement relatif des corps plongés dans un fluide.*

M. Antomari : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à la forme linéaire.*

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce.

1. Soient deux ponctuelles projectives et superposées u, u_1 , dont les points doubles sont e et f . Formons la suite des points $m, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$, telle que m_i est le point de u_1 homologue du point m_{i-1} de u . Nous savons que si les points e et f sont imaginaires conjugués, et le rapport anharmonique $(efmm_i)$ égal à une racine imaginaire $n^{\text{ème}}$ de l'unité, la suite (m) obtenue sera périodique de n en n ; M. Clebsch définit une telle suite sous le nom de *suite cyclo-projective* d'ordre n . Nous nous proposons, dans cette Communication, de rechercher s'il existe et si l'on peut construire des systèmes périodiques analogues dans les formes de deuxième espèce.

2. Soient donc deux systèmes plans collinéaires Σ et Σ_1 , dont les points doubles forment le triangle efg . Formons la suite projective des points m_i telle que m_i est le point de Σ_1 homologue du point m_{i-1} de Σ , et désignons, pour abréger, par (m) la série de points ainsi obtenue, en partant du point initial m . Supposons que nous projetions sur un même plan les systèmes Σ et Σ_1 , en F et F_1 , de telle façon que les projections des points f et g soient les points cycliques de ce plan. Les deux systèmes F et F_1 sont alors semblables et le point e est projeté au centre de similitude ω de ces deux figures. Si μ_i est la projection du point m_i , on reconnaît facilement que ce point s'obtient en construisant sur $\omega\mu_{i-1}$ un triangle semblable à un triangle donné. On a donc la relation angulaire

$$\widehat{\mu_{i-1} O \mu_i} = \alpha$$

et la relation métrique

$$O \mu_i = a O \mu_{i-1},$$

a et α étant des quantités données.

3. Nous supposons d'abord que α est une quantité différente de l'unité. Tous les points μ_i obtenus en partant du point initial μ , forment la suite (μ) , projection de la suite (m) , et sont évidemment situés sur une même spirale logarithmique ayant le point O pour pôle.

Nous en déduisons donc, par projection, que les points de la suite (m) sont situés, en général, sur une courbe transcendante S, projection de la spirale logarithmique, et admettant, par conséquent, les trois points e, f, g comme points asymptotiques. La spirale logarithmique coupant tous les rayons vecteurs issus du pôle sous un angle constant, la courbe S peut se définir de la façon suivante : elle est telle que si p est un de ces points et pt la tangente correspondante, le rapport anharmonique $p(efgt)$ est constant et égal à k , lorsque le point p se déplace sur la courbe. Chaque suite (m) détermine une courbe S; toutes les courbes correspondantes aux différentes positions initiales du point m et pour lesquelles k a la même valeur forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = 1$, $\nu = 1$ et qui est défini par une équation différentielle de Jacobi, admettant le triangle efg comme triangle fondamental. Toutes ces courbes sont, du reste, les seules qui se transforment en elles-mêmes dans la collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1 , c'est-à-dire qu'elles sont anallagmatiques dans cette transformation.

4. Supposons maintenant $\alpha = 1$, l'angle α restant toujours quelconque; les points (μ) sont alors situés sur le cercle C ayant ω pour centre et $\omega\mu$ pour rayon. Les points correspondants (m) sont donc situés sur une conique Γ_e tangente en f et g aux droites ef et eg ; ces points forment du reste sur Γ_e une suite projective de première espèce dont f et g sont les points doubles. Le système des courbes S se résout, dans ce cas, dans le faisceau des coniques Γ_e . Nous pourrions toujours, étant donnés le triangle efg et un point m de Σ , déterminer une triple infinité de points m , tels que les points de la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soient situés sur une même conique; il suffira, en effet, de prendre le point m sur une des trois coniques des faisceaux $\Gamma_e, \Gamma_f, \Gamma_g$, passant par m . La collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1 étant déterminée par le triangle efg et la correspondance

des points m et m_1 situés, par exemple, sur une conique du faisceau Γ_f ; si nous formons la suite (n) en partant d'un point initial absolument quelconque n , les points obtenus seront également tous situés sur une quelconque des coniques du faisceau Γ_f . Ce que nous venons de dire n'implique pas la réalité des trois points e, f, g ; nous pouvons supposer que le point e seul est réel, les deux autres étant imaginaires conjugués. Dans ce cas, la conique Γ_e est la seule réelle et constructible, les deux autres sont imaginaires.

5. Si $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$, k étant un entier quelconque premier avec n , la suite (μ) correspondante est périodique de n en n , et les n points distincts ainsi obtenus sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle décrit du point ω comme centre avec $\omega\mu$ pour rayon. La suite (m) sera donc également périodique de n en n , et formera ce que nous appelons une suite cyclo-projective de deuxième espèce. Tous ces points sont du reste situés sur une conique Γ_e et y forment une suite cyclo-projective de première espèce dont f et g sont les points doubles; ceci exige tout d'abord, comme on le voit immédiatement, que les points f et g soient imaginaires conjugués. Nous pourrions toujours, étant donné le triangle efg , dont les deux sommets f et g sont imaginaires conjugués, et un point m de Σ , déterminer le point m_1 , homologue dans Σ_1 , de telle façon que la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soit une suite cyclo-projective d'ordre n . Décrivons en effet la conique du faisceau Γ_e passant par m , et prenons sur cette courbe un point m_1 , tel que le rapport anharmonique $(fgmm_1)$ soit, sur la conique, égal à une racine imaginaire $n^{\text{ième}}$ de l'unité négative; un des points m_1 ainsi obtenus résoudra le problème.

La possibilité et la construction des suites cyclo-projectives de deuxième espèce sont donc parfaitement acquises et c'était là le but principal de cette Note. Nous rechercherons, dans une autre Communication, s'il existe des suites analogues pour les formes de troisième espèce.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Un théorème général de Mécanique; par M. C.-A. LAISANT.

La proposition dont il s'agit, et que je crois nouvelle, est une généralisation de celle des forces vives. En voici l'énoncé :

Soit un système matériel en mouvement depuis le temps t_0 jusqu'au temps t . Si m représente la masse d'un quelconque des points qui composent ce système; v_0 et v les vitesses de ce point au commencement et à la fin de la période considérée; F la force qui agit sur le point m ; F_1 une force de même direction appliquée au même point, mais dont la grandeur a pour expression $F \frac{f'(v)}{v}$, $f(v)$ étant une fonction arbitraire de la vitesse; si enfin T_1 représente le travail total des forces F_1 pendant la période considérée, l'accroissement de la fonction $\Sigma m f(v)$ sera égal au travail T_1 , c'est-à-dire qu'on aura

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

La démonstration, calquée sur celle de la proposition des forces vives, est des plus simples. On a en effet, identiquement,

$$d f(v) = f'(v) dv = \frac{f'(v)}{v} \frac{ds}{dt} dv = \frac{f'(v)}{v} \frac{dv}{dt} ds,$$

ou, en multipliant par m ,

$$d[m f(v)] = m \frac{dv}{dt} \frac{f'(v)}{v} ds.$$

Or $m \frac{dv}{dt}$ représente la composante tangentielle de la force F .

Donc $m \frac{dv}{dt} \frac{f'(v)}{v}$ sera la composante tangentielle de la force

$$F_1 = F \frac{f'(v)}{v},$$

et, par conséquent, le second membre représente le travail élémentaire de cette force F_1 pendant le temps infiniment petit dt .

Si nous étendons la relation ci-dessus à tous les points qui

composent le système, nous aurons donc

$$d[\Sigma m f(v)] = dT_1,$$

c'est-à-dire la somme des travaux élémentaires de toutes les forces F_1 , et en intégrant de t_0 à t ,

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

Nous examinerons maintenant plusieurs cas particuliers, remarquablement simples, auxquels s'applique ce théorème général, et qui dépendent du choix qu'on fait de la fonction arbitraire $f(v)$.

1° Soit $f(v) = v^2$; alors $\frac{f'(v)}{v} = 2$, $F_1 = 2F$, et l'on retombe sur le théorème des forces vives

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2T.$$

2° Soit $f(v) = v^n$; alors $\frac{f'(v)}{v} = n v^{n-2}$ et les forces F_1 ayant pour expression $n F v^{n-2}$, on a

$$\Sigma m v^n - \Sigma m v_0^n = T_1.$$

Par exemple, l'accroissement de la somme des quantités de mouvement est donnée par le travail des forces $\frac{F}{v}$.

3° Soient $f(v) = \log v$; alors $\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{v^2}$; $F_1 = \frac{F}{v^2}$; et le travail de ces forces F_1 donne la valeur de

$$\Sigma m \log v - \Sigma m \log v_0 = \Sigma m \log \frac{v}{v_0}.$$

4° Soient $f(v) = e^{\frac{v^2}{2}}$; alors $\frac{f'(v)}{v} = e^{\frac{v^2}{2}}$, $F_1 = F e^{\frac{v^2}{2}}$, c'est-à-dire que le coefficient par lequel il faut multiplier chaque force est précisément égal à la fonction considérée $f(v)$;

$$\Sigma m e^{\frac{v^2}{2}} - \Sigma m e^{\frac{v_0^2}{2}} = \text{travail des forces } F e^{\frac{v^2}{2}}.$$

Il semble que la proposition précédente peut être utile, en permettant d'obtenir dans certains cas une intégrale du mouvement que ne donnerait pas le théorème des forces vives.

Supposons par exemple que les forces qui agissent sur les points d'un système soient données par des expressions de la forme $F\varphi(v)$. Choisissons pour $f(v)$ la fonction $\int \frac{v dv}{\varphi(v)}$, en disposant d'ailleurs à volonté de la constante arbitraire. On aura

$$\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{\varphi(v)};$$

et les forces F , se réduiront aux forces F . Si ces dernières admettent une fonction des forces, et que l'équation des surfaces de niveau soit $\Phi(x, y, z) = k$, on aura

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = \Sigma [\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)],$$

alors que l'accroissement $\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2$ n'aurait pu être ainsi obtenu par une intégration pure et simple.

Prenons, comme cas particulier, l'hypothèse d'un système de points matériels sollicités vers un centre fixe par des forces qui sont à la fois proportionnelles à la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance r , et à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la vitesse.

L'expression de l'une de ces forces est $mkr^p v^n$. Posons

$$f(v) = \int v^{1-n} dv = \frac{1}{2-n} v^{2-n},$$

si $n \geq 2$, et

$$f(v) = \log v$$

si $n = 2$.

Nous aurons l'expression

$$\frac{1}{2-n} (\Sigma m v^{2-n} - \Sigma m v_0^{2-n})$$

dans le premier cas, et

$$\Sigma m \log v - \Sigma m \log v_0$$

dans le second, qui sera fournie par le travail des forces mkr^p , appliquées aux divers points du système et dirigées vers le centre d'attraction. Or, ce travail est fourni pour chaque point par l'intégrale

$$- \int kmr^p dr = \frac{km}{p+1} (r_0^{p+1} - r^{p+1}),$$

les surfaces de niveau étant des sphères dont le centre d'attraction est le centre commun.

Le travail pour tout le système est donc

$$\frac{k}{p+1} (\Sigma m r_0^{p+1} - \Sigma m r^{p+1}).$$

Il y a, bien entendu, exception pour le cas où $p = -1$, car l'intégrale est alors $km \log \frac{r_0}{r}$.

Si, en particulier, $n = 2$ et $p = -1$, c'est-à-dire pour des forces $mk \frac{v^2}{r}$, il vient

$$\Sigma m \log \frac{v}{v_0} = k \Sigma m \log \frac{r_0}{r}.$$

Cette relation, qui peut encore s'écrire

$$\Sigma \log \left(\frac{v r^k}{v_0 r_0^k} \right)^m = 0$$

et qui montre que pour chaque point du système la quantité $v r^k$ reste invariable pendant le mouvement, aurait d'ailleurs pu s'obtenir aisément d'une manière directe dans ce cas particulier.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	v
Liste des Sociétaires perpétuels.....	vi
État de la Société au commencement de l'année 1893.....	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv
 M ² 2b. — Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes; par M. ÉMILE PICARD.....	 1
H 12d. — Sur les suites récurrentes; par M. D'OCAGNE.....	3
L ² 2, M ² 6i. — Sur une propriété des cônes du second ordre; par M. HUMBERT.....	3
R 2b. — Théorème sur le centre des moyennes distances; par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.....	5
O 3j. — Sur une classe particulière de courbes gauches; par M. DEMOULIN.....	8
L ² 20a. — Expression de quelques aires sur le paraboloidé elliptique; par M. HUMBERT.....	13
L ² 20a. — Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloidé elliptique; par M. HUMBERT.....	17
M ² 8e. — Sur les courbes de Lamé; par M. GODEFROY.....	20
S 4a. — Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques; par M. GUSTAVE CELLÉRIER.....	26
H 9d. — Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires; par M. DEMOULIN.....	43
II 9e. — Sur une équation d'Euler; par M. RAFFY.....	44
M ² 5h, M ² 5a. — De quelques propriétés des cubiques planes et gauches; par M. MANGEOT.....	44
R 2b. — Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière relatif au centre des moyennes distances; par M. SCHLEGEL.....	49
O 3a. — Sur les normalics des courbes; par M. BIOCHE.....	51
P 1a. — Sur les involutions linéaires; par M. MAX GENTY.....	52

	Pages.
R 8e β . — Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat; par M. CARVALLO	55
A 4a. — Sur les groupes de Galois; par M. J. PEROTT.....	61
T 6, T 7. — Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques; par M. FÉLIX LUCAS.....	67
O 6m. — Sur une nouvelle classe de surfaces isothermiques et sur les sur- faces déformables sans altération des courbures principales; par M. RAFFY.....	70
S 2a. — Transformation des équations générales du mouvement des fluides; par M. TOUCHE	73
D 6a. — Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux va- riables; par M. KOBÉ	76
R 8c β . — Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes; par M. CHAI- LAN.....	81
P 2b γ . — Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloidé de ré- volution; par M. DEMOULIN.....	83
O 6a α . — Remarque sur la déformation des surfaces de révolution; par M. D'OCAGNE.....	85
X 4b. — Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un po- lynôme en facteurs; par M. ARNOUX.....	87
N 2g α . — Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; par M. DEMOULIN.....	92
A 4d. — Quelques remarques sur les équations du cinquième degré; par M. SÉLIVANOFF	97
K 9a. — Propriétés d'un système de points dans un plan; par M. FÉLIX LUCAS.....	109
I 7a. — Sur les racines primitives; par M. FROLOV.....	113
S 2a. — Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique; par M. TOUCHE.....	129
J 1a β . — Sur le nombre des séquences dans les permutations des n pre- miers nombres; par M. DESIRE ANDRÉ.....	131
P 1a. — Sur les systèmes collinéaires; par M. MAX GENTY.....	131
O 6k. — Sur des couples de surfaces applicables; par M. CARONNET.....	134
S 2b. — Sur les équations du clapotis; par M. GUYOU.....	140
P 1a. — Sur un théorème de Laguerre; par M. MAX GENTY.....	145
L 16f. — Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique; par M. MANGEOT.....	146
P 1a. — Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce; par M. MAX GENTY.....	148
R 6a β . — Un théorème général de Mécanique; par M. LAISANT.....	151

FIN DE LA TABLE DU TOME XXI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888),

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-DEUXIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1894



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

20652 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-DEUXIÈME. — ANNÉE 1894.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1894



LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1884	PICARD.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1885	APPELL.
1875	BIENAYMÉ.	1886	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1887	FOURET.
1877	MANNHEIM.	1888	LAISANT.
1878	DARBOUX.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1879	O. BONNET.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1880	JORDAN.	1891	COLLIGNON.
1881	LACUERRE.	1892	VICAIRE.
1882	MALPHEN	1893	HUMBERT.
1883	ROUCHÉ.	1894	PICQUET.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loir).
BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BIOCHE, professeur de mathématiques, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, à Paris.
BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, à Bar-le-Duc (Meuse).
CANET, ingénieur civil, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, à Paris.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur, à Paris.
HATON DE LA GOUTILLIÈRE, membre de l'Institut, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, à Paris.
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
DE MENDIZABAL TAMBORÉ, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques, à Paris.
PEROTT (Joseph), à Worcester (Massachusetts).
FERRIX, ingénieur en chef des mines, au Mans (Sarthe).
POINCARÉ, membre de l'Institut, à Paris.
POLIGNAC (prince C. de), à Grasse (Alpes-Maritimes).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Paris.
TARRI, inspecteur des contributions diverses, à Alger.
TCHÉBICHEF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.

— — — — —

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1894 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{ MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. JORDAN. TCHÉBICHEF.
Président	MM. PICQUET.
Vice-Présidents	{ DE COMBEROUSSE. GOURSAT. KOENIGS. POINCARÉ.
Secrétaires	{ CARVALLO. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{ L. LÉVY. PAINLEVÉ.
Archiviste	BIOCHE.
Trésorier	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ ANDRÉ, 1896. APPELL, 1897. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1896. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1897. HUMBERT, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1897. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1897. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villars, 2, à Paris.
1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. **ANTOMARI**, directeur des études à l'Ecole Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. **ARNAUD**, ingénieur des ponts et chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1892. **ARNOUX** (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. **BEGHIN** (Maurice), ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. **BEYENS** (Ignacio), major du génie, santa Inés, 5, à Cadix (Espagne).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), directeur du matériel au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. **BIOCHE**, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris.
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1890. **BJERNKNES**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1891. **BLUTEL**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Condorcet, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), Cours la Reine, 22, à Paris.
1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. **BOULANGER**, professeur de mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algerie).
1886. **BRAULT** (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. **BRISSE** (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 18, à Paris.
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).
1886. **BRINEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. **BURCKHARDT**, privat-docent à l'Université de Göttingue, avenue Marceau, 37, à Paris.
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, via Macqueda, 230, à Palerme (Italie).
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, rue Vignon, 3, à Paris.
1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. **CARONNET**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, avenue de Villiers, 10, à Paris.
1887. **CARVALLO**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Paris-Passy.
1887. **CASPARY**, professeur à l'École d'Architecture, Invalidenstrasse, 123, Berlin (Allemagne).
1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, rue des Éburons, 21, à Liège (Belgique).

Date
de
l'admission.

1890. CEDERCRANTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), boulevard de Port-Royal, 48, à Paris.
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. COLOT, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. COURCELLES, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. CRETIN, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. DARBOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'État-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. DEMANTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, répétiteur à l'Université, rue du Soleil, 8, à Gand (Belgique).
1883. DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. DEWULF, général du génie en retraite, rue de l'Aigle d'Or, 11, à Aix (Bouches-du-Rhône).
1886. DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au collège de Parthenay (Deux-Sèvres).
1892. FERR (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue de Vaugirard, 46, à Paris.
1885. FERRAZ, professeur au lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, Burlington Street, 10, à Hamilton (Canada).
1893. FLEURY, ancien chef d'institution, rue de la Santé, 46, à Paris.
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Date
de
l'admission.

1872. **FLYE SAINT-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1891. **FONTVIOLANT (DE)**, professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 39, Paris-Auteuil.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
1892. **PROLOV** (le général), quai Pierre Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **CEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY (E.)**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Oran (Algérie).
1890. **GENTY (Max)**, enseigne de vaisseau, à bord du *Héron* (station locale du Sénégal).
1892. **GENTY (Paul)**, rue Cornaille, 5, à Paris.
1893. **GÉRARD**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1881. **GOUSAT**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1880. **GUCCIA (Jean)**, professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. **GUIMARAES**, officier du génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER (Dr Sigismond)**, professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. **HENRY**, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. **HENRY (Charles)**, bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. **HOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés Saint-Jacques, 16, à Paris.
1879. **HOLST (Elling)**, professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 19, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO (Comte L.)**, traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. **ISSALY (l'abbé)**, rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.

Date
de
l'admission.

1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), docteur en philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1890. **KOBB** (Gustaf), maître de Conférences à l'Université de Stockholm (Suède).
1892. **KOCH** (H. von), maître de conférences à l'Université de Stockholm (Suède).
1880. **KÖNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1881. **LACOR**, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. **LANCELIN**, boulevard Arago, 97, à Paris.
1875. **LAQUIÈRE**, administrateur de la commune mixte de Tablat (département d'Alger).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. **LAVEISSIÈRE**, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, boulevard du Mont-Parnasse, 12, à Paris.
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. **LE PONT**, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. **LESPIAULT**, ancien professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. **LÉVY** (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. **LIGUINE**, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Georgenstrasse, 42, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. **LORIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. **LYON**, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. **MALLOIZEL**, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1892. **MANGEOT**, docteur ès sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris.
1881. **MARTIN** (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).

- Date
de
l'admission
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 141, à Paris.
1893. **MARTIN** (Gaston), professeur de mathématiques, rue Truffaut, 118, à Paris.
1893. **MATHE**, censeur des études au lycée, à Saint-Priest (Côtes-du-Nord).
1890. **MASSEI**, inspecteur général des mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. **MAXIMOVITCH** (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timofeïska, 5, à Kiev (Russie).
1889. **MEYDIZABAL TAMBOREL DE**, membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1881. **MENCZREAU**, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris.
1893. **MICHEL**, lieutenant du génie, à Montpellier (Hérault).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOLTARD**, inspecteur général des mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **MUNHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Rho-wanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclavain, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (p.), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. **OVIDIO** (Enrico p.), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. **PAINLEVÉ**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvranee, 20, à Orléans (Loiret).
1881. **PARAP**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. **PARENTIER**, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1893. **PASSERAT**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue des Archives, 41, à Paris.
1881. **PAUTOXNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Ballainvilliers, 7, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Constantine (Algérie).
1871. **PERCIN**, lieutenant-colonel d'artillerie, directeur de la manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. **PERRIV**, ingénieur en chef des mines, rue Erpoll, 5, au Mans (Sarthe).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse (Alpes-Maritimes).
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRENLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **PUTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1893. **QUINTARD**, professeur de mathématiques, boulevard des Batignolles, 45, à Paris.
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
1881. **RIBOT**, professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1893. **RIVIEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur des manufactures de l'État, quai d'Orsây, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROUQUET**, professeur de mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **ROTSSELIN**, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. **RUSSO** (Giovanni), professeur, palazzo Serravalle, via Aranci, 2, à Catanzaro (Italie).
1881. **SAINT-PAUL** (DUCUP DE), lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. **SARAZ**, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 229, à Paris.
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL** (Dr Victor), professeur à l'École technique, à Hagen (Allemagne).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1877. **SÉGUY**, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. **SIMART**, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. **STARKOFF** (Alexis), professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. **STIELTJES**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris.
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), inspecteur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
1882. **TCHÉBICHEF**, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie).
1872. **TERRIEN**, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.
1872. **TISSERAND**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.

Date
de
l'admission.

1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue de Téhéran, 24, à Paris.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. **VACQUANT**, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (de la), chargé de cours à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. **VANECEK** (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. **VASCHY**, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. **VICAIRE**, ingénieur en chef des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. **VITO VOLTERRA**, professeur à l'Université, à Pise (Italie).
1893. **WAGNER**, professeur à l'École J.-B. Say, rue Pierre Charron, 1, à Paris.
1880. **WALCKENAEER**, ingénieur des mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. **WEILL**, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. **WEYR** (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
1872. **WEYR** (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
1882. **WILSON**, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUDSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. **ZRUTVEN**, professeur à l'Université, Ostergade, 10, à Copenhague (Danemark).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédac- teur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprin- zen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammeneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 JANVIER 1894.

PRÉSIDENTE DE M. HUMBERT.

La Société procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Démissions :

MM. Henri Buisson et Léon Lévy adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communication :

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre en relation avec les fonctions abéliennes de genre trois.*

SÉANCE DU 17 JANVIER 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Lancelin : *Essai d'application de la théorie des variables complexes au problème des trois corps dans le cas des mouvements plans.*

M. Bioche : *Sur le degré des lignes asymptotiques des surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire.*

M. Picquet : *Sur l'identité du problème du neuvième point commun à un faisceau de cubiques planes avec celui du huitième point commun à un réseau de quadriques.*

M. Raffy : *Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques.*

M. Émile Picard adresse un Mémoire : *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA THÉORIE DE LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ;

Par M. ÉMILE PICARD.

Les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique ont été, comme l'on sait, représentées par l'équation

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

V est le potentiel, et A , B , C sont trois constantes positives.

En choisissant convenablement les unités, on peut réduire l'équation à la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

et enfin, en posant

$$V = U e^{-t},$$

on a l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U.$$

M. Poincaré a fait récemment, dans les *Comptes rendus* ⁽¹⁾, une discussion des intégrales de cette équation, fort intéressante au point de vue physique; j'ai montré ensuite ⁽²⁾ comment l'équa-

⁽¹⁾ H. POINCARÉ [*Sur la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, 26 décembre 1893)].

⁽²⁾ EM. PICARD [*Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, 2 janvier 1894)].

tion précédente pouvait être discutée de la manière la plus simple et la plus rigoureuse à l'aide de la méthode générale de Riemann, méthode fondamentale dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles : c'est ce que je me propose de développer ici.

1. Je rappellerai d'abord les résultats de Riemann, en me reportant à la remarquable exposition faite par M. Darboux, dans le tome II de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (p. 75). Prenons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

et soit considérée en même temps son adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) u = 0,$$

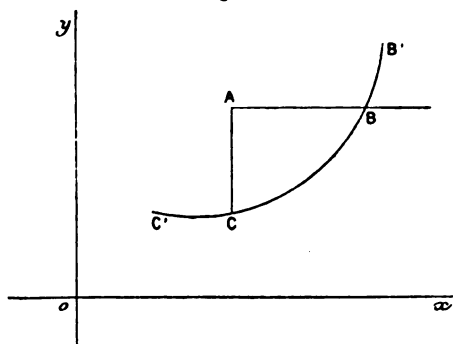
et posons

$$M = auz + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$N = buz + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Soient B'C' (fig. 1) une courbe tracée arbitrairement dans le plan et A un point quelconque de ce plan.

Fig. 1.



En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de A, supposons que l'on ait déterminé la solution

$$u(x, y; x_0, y_0)$$

de l'équation adjointe, se réduisant à l'unité pour $x = x_0$, $y = y_0$, et prenant la valeur

$$e^{\int_{x_0}^x b \, dx}$$

pour $y = y_0$, tandis qu'elle prend la valeur

$$e^{\int_{y_0}^y a \, dy}$$

pour $x = x_0$. Dans ces conditions, on aura

$$(uz)_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \int_C^B (N \, dx - M \, dy),$$

l'intégrale curviligne étant prise le long de $C'B'$.

Cette formule permet de déterminer la solution z de l'équation aux dérivées partielles proposée, qui prend des valeurs données ainsi que l'une de ses deux dérivées pour les points de la courbe $B'C'$. L'équation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

appliquée à un déplacement suivant cette courbe, détermine évidemment celle des deux dérivées premières qui n'est pas donnée *a priori*.

2. Ceci rappelé, revenons à l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z,$$

en remplaçant U par z . Transformons-la en posant

$$2X = x + t, \quad 2Y = x - t.$$

On obtient de suite

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + z = 0.$$

L'équation adjointe est ici :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0,$$

c'est la même équation.

Supposons qu'une intégrale de l'équation (1) soit déterminée par les conditions initiales suivantes : on se donne z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, ces valeurs étant seulement *différentes de zéro* pour x compris entre a et b ($a > b$).

On voit alors que, pour l'équation (2), on peut considérer la fonction z ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre *comme données sur la bissectrice de l'angle des axes*; les valeurs données sont seulement *différentes de zéro* sur un segment fini de cette bissectrice, à savoir le segment déterminé par les équations

$$X = Y = \frac{x}{2},$$

x variant de b à a .

3. Pour appliquer la méthode de Riemann, nous avons seulement à voir si nous pouvons déterminer l'intégrale u de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0$$

qui pour $X = X_0$ prend la valeur u quel que soit Y , et qui pour $Y = Y_0$ prend la valeur u quel que soit X . Or cette recherche est immédiate, car, en posant

$$\lambda = (X - X_0)(Y - Y_0),$$

on trouvera une fonction $u = \varphi(\lambda)$ satisfaisant à l'équation précédente; en effet, on obtient ainsi l'équation de Bessel

$$\lambda \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi}{d\lambda} + \varphi = 0$$

et la fonction cherchée est la série de Bessel

$$u = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(1.2)^2} - \frac{\lambda^3}{(1.2.3)^2} + \dots$$

4. Figurons (*fig. 2*) le plan (X, Y) .

L'intégrale z est nulle ainsi que $\frac{\partial z}{\partial X}$ (et par suite $\frac{\partial z}{\partial Y}$) sur la bissectrice des axes, sauf sur la partie βx ; on a sur cette partie des

successions de valeurs données pour z et $\frac{\partial z}{\partial X}$ (d'où résulte la valeur de $\frac{\partial z}{\partial Y}$). Nous avons donc la formule

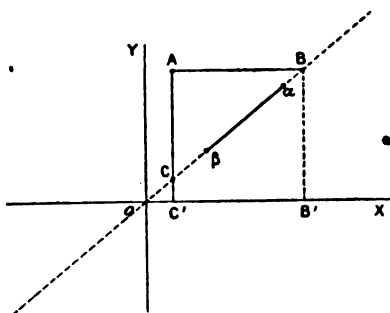
$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_C^B \left(u \frac{\partial z}{\partial X} - z \frac{\partial u}{\partial X} \right) dX - \left(u \frac{\partial z}{\partial Y} - z \frac{\partial u}{\partial Y} \right) dY,$$

ce que l'on peut écrire :

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_C^B \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y} \right) dX - \frac{(X_0 - Y_0)}{2} \int_C^B z \frac{d\varphi}{d\lambda} dX.$$

On peut regarder sous les signes d'intégration $\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}$ et z comme des fonctions arbitrairement données de X , différentes de

Fig. 2.



zéro entre $\frac{b}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et nulles pour toute autre valeur de X ; désignons-les par $\psi(X)$ et $\chi(X)$. Nous aurons donc

$$z(t_0, x_0) = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_{C'}^{B'} \varphi(\lambda) \psi(X) dX - t_0 \int_{C'}^{B'} \chi(X) \varphi'(\lambda) dX$$

$$2X_0 = x_0 + t_0, \quad 2Y_0 = x_0 - t_0,$$

en désignant par C' et B' les projections de C et B sur OX , et en posant

$$\lambda = \left(X - \frac{x_0 + t_0}{2} \right) \left(Y - \frac{x_0 - t_0}{2} \right).$$

Telle est la forme de l'intégrale générale de l'équation (1).

5. Discutons la valeur de $z(t_0, x_0)$, quand, x_0 étant arbitraire mais fixe, t_0 varie de 0 à $+\infty$.

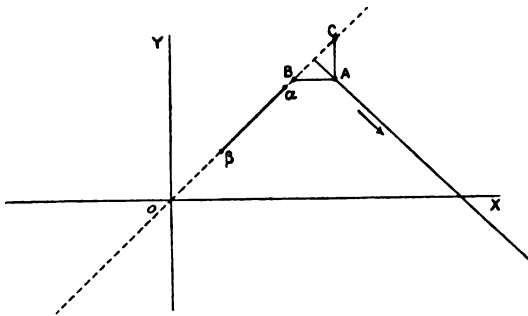
Supposons x_0 en dehors de l'intervalle ba . Les relations

$$2X_0 = x_0 + t_0, \quad 2Y_0 = x_0 - t_0$$

montrent que le point A de coordonnées X_0, Y_0 se déplace sur une droite perpendiculaire à $\alpha\beta$, comme l'indique la *fig. 3* qui correspond à $x_0 > a$.

Tant que t_0 est trop petit pour que le point B soit situé dans l'in-

Fig. 3.



tervalle $\alpha\beta$, tous les termes figurant dans l'expression de $z(t_0, x_0)$ sont nuls. C'est seulement quand B arrive en α que z devient différent de zéro; ceci se produit quand

$$\frac{x_0 - t_0}{2} = \frac{a}{2},$$

c'est-à-dire à l'instant $x_0 - a$, et la partie ne contenant pas de signe d'intégration dans $z(t_0, x_0)$, c'est-à-dire $\frac{(uz)_B}{2}$, sera *différente de zéro* depuis le temps $x_0 - a$ jusqu'au temps $x_0 - b$. On peut dire que *cette partie correspond à une onde régulière*.

Une fois le temps $x_0 - b$ dépassé, la valeur de z se réduit à

$$z(t_0, x_0) = -\frac{1}{2} \int_b^{\frac{a}{2}} \varphi(\lambda) \psi(X) dX - t_0 \int_b^{\frac{a}{2}} \chi(X) \varphi'(\lambda) dX.$$

On voit donc ainsi bien nettement *une sorte de résidu laissé par l'onde régulière que représentait le terme* $\frac{(uz)_B}{2}$.

Quant à la valeur asymptotique de $z(t_0, x_0)$ ou plutôt de

$$V(t_0, x_0) = e^{-t_0} z(t_0, x_0)$$

pour t_0 très grand, elle serait facile à obtenir à l'aide de l'expression asymptotique bien connue de $\varphi(\lambda)$ pour λ infini, mais je ne m'y arrêterai pas; ce que nous venons de dire suffit pour montrer la nature des intégrales de *l'équation des télégraphistes*.

SUR LES GÉODÉSIQUES SPÉCIALES DES SURFACES HARMONIQUES;

Par M. L. RAFFY.

1. On sait que, si l'élément linéaire d'une surface est réductible à la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

les lignes géodésiques de cette surface ont pour équation finie

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{a-V}} = b.$$

Si l'on établit une dépendance quelconque entre les deux constantes arbitraires a et b , on obtient une famille de géodésiques. Mais on peut aussi attribuer à l'une de ces constantes une valeur numérique. Il y a lieu de considérer, en particulier, les familles de géodésiques qui s'obtiennent en prenant pour a une valeur numérique a_0 et laissant varier b . Nous leur donnerons, pour abréger le langage, le nom de *géodésiques spéciales*.

Il existe entre les géodésiques spéciales et la forme de l'intégrale quadratique une relation que voici :

Étant donnée une surface harmonique d'élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

si on la rapporte à une famille de géodésiques spéciales $\theta_1 = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $\theta = \text{const.}$, en sorte qu'il vient

$$(2) \quad ds^2 = d\theta^2 + \sigma d\theta_1^2,$$

l'équation aux géodésiques relative aux variables θ et θ_1 ,

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 est affecté d'un coefficient constant et peut, par suite, être supposé nul.

Réciproquement, si pour l'élément linéaire (2), l'équation aux géodésiques

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 a un coefficient constant, les géodésiques $\theta_1 = \text{const.}$ sont des géodésiques spéciales, c'est-à-dire qu'après le changement de variables qui ramène l'élément linéaire (2) à la forme (1), ces géodésiques sont représentées par l'équation

$$\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} = 0,$$

où a est une constante numérique.

2. On sait en effet que, pour l'élément linéaire (1), l'intégrale quadratique du problème des géodésiques est

$$(3) \quad I = \frac{V}{U-V} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 + \frac{U}{U-V} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 = \text{const.}$$

On sait aussi que l'élément linéaire (1) peut s'écrire

$$ds^2 = (\sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv)^2 + (U-a)(a-V) \left(\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} \right)^2,$$

de sorte que, pour rapporter la surface à une famille de géodésiques spéciales $\theta_1 = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $\theta = \text{const.}$, on fera le changement de variables

$$(4) \quad \begin{cases} d\theta = \sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv, \\ d\theta_1 = \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}}. \end{cases}$$

Voyons ce que devient l'intégrale I quand on l'exprime en θ .

et θ_1 . L'identité générale

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} (\sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv) + \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} \left(\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} \right),$$

où nous posons

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = p, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} = q,$$

donne immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= p \sqrt{U-a} + \frac{q}{\sqrt{U-a}}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= p \sqrt{a-V} - \frac{q}{\sqrt{a-V}}. \end{aligned}$$

Il suffit de porter ces expressions dans l'intégrale (3) pour voir que le coefficient de p^2 se réduit à la constante a . On peut donc, en retranchant de cette intégrale l'équation aux géodésiques

$$p^2 + \frac{q^2}{a} = 1,$$

multipliée par a , obtenir une nouvelle intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2 , ce qui prouve la première partie de notre énoncé.

3. Pour établir la réciproque, nous allons déterminer le changement de variables

$$(5) \quad \begin{cases} d\theta = M du + N dv, \\ d\theta_1 = M_1 du + N_1 dv, \end{cases}$$

par lequel on passe, dans l'hypothèse actuelle, de l'élément linéaire (2) à l'élément linéaire (1).

L'identité

$$(U - V)(du^2 + dv^2) = (M du + N dv)^2 + \tau (M_1 du + N_1 dv)^2$$

entraîne les trois relations

$$M^2 - \tau M_1^2 = U - V, \quad MN + \tau M_1 N_1 = 0, \quad N^2 - \tau N_1^2 = U - V,$$

entre lesquelles on élimine aisément M_1 et N_1 . On trouve ainsi

$$(6) \quad U - V = M^2 - N^2.$$

Mais, par hypothèse, le coefficient de p^2 dans l'intégrale quadratique I exprimée en θ et θ_1 se réduit à une constante. Or les formules (5) donnent, pour la fonction ϖ ,

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} = Mp + M_1 q, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial v} = Np + N_1 q.$$

D'après cela, si nous calculons le coefficient de p^2 dans l'intégrale (3), en l'égalant à une constante a , nous trouverons

$$\frac{VM^2 + UN^2}{U - V} = a,$$

ce qui peut s'écrire

$$-\frac{V}{N^2 - a} = \frac{U}{M^2 + a} = \frac{1}{h},$$

en désignant par h une indéterminée. Ces deux relations donnent

$$M^2 = Uh - a, \quad N^2 = a - Vh;$$

la substitution de ces valeurs dans la condition (6) montre que h est égal à l'unité. On a donc

$$M = \sqrt{U - a}, \quad N = \sqrt{a - V},$$

et, par suite,

$$d\theta = \sqrt{U - a} du + \sqrt{a - V} dv.$$

Dès lors la différence $ds^2 - d\theta^2$, qui n'est autre que $\sigma d\theta_1^2$, se réduisant à

$$(U - a)(a - V) \left(\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}} \right)^2$$

en vertu de l'identité rappelée au début, l'équation $d\theta_1 = 0$ revient à

$$\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

4. Supposons maintenant qu'un élément linéaire de surface harmonique soit donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

et cherchons sous quelles conditions les géodésiques $v = \text{const.}$ seront des géodésiques spéciales.

Nous devons exprimer que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv p^2 + \frac{q^2}{G} = 1$$

admet une intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2

$$I \equiv 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Écrivons, à cet effet, que le crochet

$$[\Delta, I] \equiv \frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial \Delta}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial \Delta}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial v}$$

est nul quels que soient p et q . L'identité ainsi obtenue

$$q^2(BG'_u + CG'_v + GC'_v) + pq^2(BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u) + 2qp^2G^2B'_u = 0$$

donne lieu aux trois équations

$$\begin{aligned} BG'_u + CG'_v + GC'_v &= 0, \\ BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u &= 0, \\ B'_u &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi B est une fonction de v seulement, d'où cette conclusion :

Un élément linéaire étant donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

pour qu'il convienne à des surfaces harmoniques et qu'en outre les courbes $v = \text{const.}$ soient des géodésiques spéciales, il faut et il suffit qu'il existe une fonction B de la seule variable v et une fonction C de u et de v qui vérifient les deux équations

$$(7) \quad BG'_u + CG'_v + GC'_v = 0,$$

$$(8) \quad BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u = 0$$

où B' désigne la dérivée de B .

5. Nous allons appliquer cette règle à l'élément linéaire des surfaces qui présentent une famille de courbes parallèles dont la courbure géodésique en chaque point est fonction de la courbure totale. Si l'on rapporte ces surfaces aux courbes considérées ($u = \text{const.}$) et aux géodésiques orthogonales ($v = \text{const.}$), leur élément linéaire prend la forme ci-dessus. La courbure géodé-

sique ω des courbes $u = \text{const.}$ et la courbure totale $(R_1 R_2)^{-1}$ de la surface ont respectivement pour valeurs

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Nous exprimerons donc notre hypothèse en écrivant que la combinaison

$$-\frac{1}{R_1 R_2} - \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2 = -\frac{\partial \omega}{\partial u}$$

est une fonction de ω , ce qui revient à

$$\psi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} = 1.$$

L'intégration introduit une fonction arbitraire V de v et donne

$$\psi(\omega) = u + V.$$

On conclut de là que ω est une fonction de $u + V$, et si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u+V)}} \frac{\partial \sqrt{\varphi(u+V)}}{\partial u},$$

on trouve immédiatement

$$G(u, v) = \varphi(u + V),$$

en réduisant à l'unité, comme il est permis, la fonction de v qui devrait multiplier le second membre. Nous obtenons ainsi l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u + V) dv^2,$$

qui convient en particulier à toutes les surfaces de révolution quand la dérivée de V se réduit à une constante.

6. Pour simplifier la discussion des équations (7) et (8) qui expriment la propriété des géodésiques spéciales, nous supposons que la fonction B se réduit à une constante, ce qui permet de faire $B = 1$. Alors ces équations deviennent

$$(9) \quad \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial(CG)}{\partial v} = 0,$$

$$(10) \quad \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{G} = 0.$$

Introduisons l'hypothèse

$$G = \varphi(u + V).$$

L'équation (10) s'écrit

$$\frac{\partial C}{\partial u} - V' \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\varphi} = 0.$$

Intégrant et désignant par W une fonction inconnue de v , on a

$$(10)' \quad C = \frac{V'}{\varphi} + W,$$

d'où, par substitution dans l'équation (9),

$$(9)' \quad (WV' + 1)\varphi' + W'\varphi + V'' = 0.$$

Avant d'aller plus loin, indiquons que la supposition $V' = 0$ conduirait à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{au} dv^2$$

des surfaces à courbure totale constante.

Ce cas particulier mentionné, différencions l'équation (9)' par rapport à u , nous aurons

$$(11) \quad (WV' + 1)\varphi'' + W'\varphi' = 0.$$

Supposons d'abord $WV' + 1 = 0$, ce qui exige soit $\varphi' = 0$, soit $W' = 0$. La solution $\varphi = \text{const.}$ correspond aux surfaces développables. Si W est constant, il en est de même de V' ; on a

$$W = \frac{1}{a}, \quad V' = -a, \quad V'' = 0.$$

L'équation (9)' est une identité. La fonction φ reste arbitraire et l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u - av) dv^2$$

convient à toutes les surfaces de révolution.

Nous supposerons désormais le produit $(WV' + 1)\varphi'$ différent

de zéro. Alors l'équation (11) donne

$$(11)' \quad \frac{\varphi''}{\varphi'} = - \frac{W'}{WV' + 1} = \text{const.} = m;$$

d'où deux cas à distinguer suivant que m est nul ou différent de zéro.

7. *Premier cas : $m = 0$.* La fonction W se réduit à une constante, la fonction φ est linéaire et l'on peut prendre

$$\varphi = n(u + V), \quad n = \text{const.}$$

L'équation (9)' devient

$$n(WV' + 1) + V'' = 0$$

ou, en intégrant,

$$(9)'' \quad V' + nWV + nV = 0.$$

Si la constante W est nulle, une nouvelle intégration donne

$$V = -n \frac{v^2}{2};$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + n \left(u - n \frac{v^2}{2} \right) dv^2,$$

que l'on peut mettre sous la forme plus simple

$$(I) \quad ds^2 = du^2 + 2(u - v^2) dv^2,$$

en multipliant u et v par des constantes convenables.

Si la constante W n'est pas nulle, l'intégration de l'équation (9)'' donne

$$V = pe^{-nWv} - \frac{v}{W} + \frac{1}{nW^2},$$

avec une nouvelle arbitraire p . Alors l'élément linéaire peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + n \left(u - \frac{v}{W} + pe^{-nWv} \right) dv^2.$$

On le réduit à la forme plus simple

$$(II) \quad ds^2 = du^2 + 2 \left(u + av + be^{\frac{2v}{a}} \right) dv^2,$$

où n'entrent plus que deux arbitraires a et b , en multipliant u et v par des constantes convenables. On peut même, quand b n'est pas nul, le réduire à l'unité en profitant des constantes qui s'ajoutent à u et à v .

Remarque. — Les éléments (I) et (II) se présentent dans la recherche des surfaces réglées harmoniques quand on considère celles de ces surfaces qui admettent une génératrice tangente au cercle de l'infini. J'ai démontré, en effet ⁽¹⁾, que leur élément linéaire est réductible soit à la forme (I), soit à la forme (II), qui conviennent l'une et l'autre à des paraboloides imaginaires, sauf pour $b = 0$, cas où le paraboloides est de révolution. Ce sont là les seules quadriques dont on connaisse toutes les déformations, découvertes successivement par M. Weingarten, celles du paraboloides de révolution d'abord ⁽²⁾, puis celles ⁽³⁾ du paraboloides (I), enfin celles ⁽⁴⁾ du paraboloides (II).

8. *Second cas* : $m \neq 0$. Nous poserons, pour abrégé, $t = u + V$. Les deux relations (11)' donnent

$$(12) \quad W' = -m(WV' + 1)$$

$$(13) \quad \varphi = \alpha e^{mt} - \beta,$$

en désignant par α et β deux constantes arbitraires. Substituant cette expression de φ dans l'équation (9)' et tenant compte de l'équation (12) nous avons, pour déterminer V et W , le système

$$(11)' \quad V'' + m\beta(WV' + 1) = 0,$$

$$(12) \quad W' + m(WV' + 1) = 0.$$

L'hypothèse $\beta = 0$ donne $V'' = 0$, d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{m(u-av)} dv^2,$$

qui correspond à des surfaces à courbure totale constante.

⁽¹⁾ *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890).

⁽²⁾ *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 382; 1861.

⁽³⁾ *Göttinger Nachrichten*; 1887.

⁽⁴⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 706; 1891.

Soit donc désormais $\beta \neq 0$. Le système ci-dessus entraîne

$$V' - \beta W' = 0$$

ou bien, en appelant $-2q\gamma$ une constante d'intégration,

$$(14) \quad V' = \beta(W - 2\gamma).$$

Substituons cette expression de V' dans l'équation (12); nous aurons

$$(15) \quad \frac{W'}{(W-r)^2 + n^2} = -m\beta, \quad n^2 = \frac{1}{\beta} - \gamma^2.$$

Il faut distinguer, suivant que n est nul ou différent de zéro.

1° Soit $n = 0$. L'équation (15) s'écrit

$$\frac{-W'}{(W-r)^2} = \frac{m}{\gamma^2};$$

on en déduit

$$\frac{1}{W-\gamma} = \frac{m\gamma}{\gamma^2}.$$

La relation (14) donne alors

$$V = \frac{1}{m} \log v - \frac{\gamma}{\gamma^2},$$

et la formule (13) devient

$$\varphi = \alpha v e^{m(u - \frac{\gamma}{\gamma^2})} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Nous avons négligé deux constantes additives sans importance. L'élément linéaire auquel nous arrivons peut être simplifié et mis sous la forme

$$(III) \quad ds^2 = du^2 + (ve^{u+\gamma} - 1) dv^2.$$

L'intégrale quadratique correspondante est

$$I = 2pq + \left[\frac{(\gamma + 1)e^{u+\gamma}}{ve^{u+\gamma} - 1} - 2 \right] q^2 = \text{const.}$$

2° Soit maintenant $n \neq 0$. De l'équation (15) on tire

$$W - \gamma = -n \tanh mn\beta v.$$

La relation (14) donne alors

$$V = -\beta\gamma v + \frac{1}{m} \log \cos mn\beta v,$$

et la formule (13) devient

$$\varphi = \alpha \cos mn\beta v e^{m(u-\beta\gamma v)} - \beta.$$

L'élément linéaire cherché est donc

$$ds^2 = du^2 + [\alpha \cos mn\beta v e^{m(u-\beta\gamma v)} - \beta] dv^2.$$

Si γ est nul, on peut le ramener à la forme plus simple

$$(IV) \quad ds^2 = du^2 + (e^u \cos v - 1) dv^2,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I \equiv 2pq - \frac{e^u \sin v}{e^u \cos v - 1} q^2 = \text{const.}$$

Si γ n'est pas nul, il subsiste une constante arbitraire dans l'expression définitive de l'élément linéaire

$$(V) \quad ds^2 = du^2 + (e^{u+v} \cos av - a^2 - 1) dv^2, \quad a(a^2 + 1) \neq 0,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I \equiv 2pq + \frac{q^2}{a^2 + 1} \left[\frac{e^{u+v} (\cos av - a \sin av)}{e^{u+v} \cos av - a^2 - 1} - 2 \right] = \text{const.}$$

On sait que la connaissance de l'intégrale quadratique fournit le changement de variables propre à ramener l'élément linéaire à la forme harmonique.

9. Nous terminerons par une observation relative aux enveloppes des familles de géodésiques spéciales. Si l'élément linéaire est donné sous la forme

$$du^2 = (U - V)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2),$$

chaque famille de géodésiques spéciales sera représentée par l'équation différentielle

$$\frac{U_1 du}{\sqrt{U - a}} + \frac{V_1 dv}{\sqrt{a - V}} = 0,$$

où la lettre a représente un nombre déterminé, variable d'une famille à l'autre.

D'après cette équation, on pourrait être tenté de croire que toutes les courbes d'une famille sont tangentes aux lignes de la surface représentées par l'une ou l'autre des équations

$$U - a = 0, \quad V - a = 0.$$

Car si u_0 , par exemple, est une racine de la première, pour $u = u_0$ l'équation différentielle donne *en général* $du = 0$, en sorte que les géodésiques de la famille seront tangentes à la courbe de paramètre u_0 . Mais il importe de remarquer que si u_0 annule la fonction U , et fait acquérir une valeur finie au rapport $U_1 : \sqrt{U - a}$, on n'est plus en droit d'affirmer que du soit nul. Les géodésiques de la famille spéciale peuvent n'avoir pas d'enveloppe. C'est précisément ce qui a lieu pour les surfaces du second degré. Leur élément linéaire étant mis (en coordonnées elliptiques ou paraboliques) sous la forme

$$ds^2 = (u - v)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2),$$

où U_1 et V_1 ont des expressions bien connues, c'est en faisant $a = 0$ dans l'équation

$$\frac{U_1 du}{\sqrt{u - a}} + \frac{V_1 dv}{\sqrt{a - v}} = 0$$

qu'on obtient les génératrices rectilignes, qui sont des géodésiques sans enveloppe. Les coefficients de du et de dv restent finis quand on fait soit $u = 0$, soit $v = 0$.

NOUVELLE CONTRIBUTION AU PROBLÈME DU HUITIÈME POINT COMMUN A TROIS QUADRIQUES. SON IDENTITÉ AVEC UN PROBLÈME PLAN;

Par M. H. PICQUET.

1. Dans le premier Volume de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, p. 12, M. Zeuthen, en réponse à une question de M. Poincaré, fait un rapide historique du problème du huitième point commun aux quadriques qui passent par sept points donnés. On

y voit que ce sujet n'a pas été traité par moins de onze auteurs, dont les travaux, sauf ceux de M. P. Serret, ont tous été publiés à l'étranger, et la plupart en langue étrangère. Cette circonstance, rapprochée des raisons pour lesquelles la question a été de nouveau soulevée, m'engage à rappeler dans un recueil français une des solutions que j'en ai indiquées.

En 1871, j'ai donné au *Journal de Crelle* (t. 73, p. 365) une première construction du huitième point, dont le caractère linéaire fut à tort contesté par Borchardt, comme je l'établis en 1885, en même temps que j'envoyais à ce recueil (t. 99, p. 225) une seconde solution, plus simple que la première et que je vais résumer.

2. *Construction.* — Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés.

1° Dans le plan 5 6 7 joindre le point 5 à deux des trois couples de sommets opposés du quadrilatère complet résultant de l'intersection de ce plan avec le tétraèdre 1 2 3 4, et prolonger ces deux couples de droites jusqu'à la droite 6 7, sur laquelle elles déterminent deux couples de points a, a' et b, b' . Mener par le point 6 une droite quelconque qui coupe le couple $(5a, 5a')$ aux points c et c' ; joindre bc qui coupe $5a'$ en d et $b'c'$ qui coupe $5a$ en d' . La droite dd' détermine sur 6 7 un point α .

2° Opérer de même dans les plans 4 6 7 et 3 6 7 avec la droite 6 7 et respectivement les points 4 et 3, ce qui donne sur cette droite deux nouveaux points β et γ .

3° Le plan P mené par 6 7 et formant avec les trois précédents un rapport anharmonique égal à celui des quatre points 7, α , β , γ passe par le point cherché.

4° Les mêmes constructions, répétées deux fois, en substituant à la droite 6 7 les droites 4 5 et 2 3, par exemple, déterminent le point 8 par l'intersection de trois plans. Mais on peut aussi opérer comme il suit dans le plan P.

Figurer sur ce plan les traces D_1, D_2, D_3 du trièdre formé par les trois droites 1 4, 2 4, 3 4 et les traces $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ du trièdre formé par les trois droites 1 5, 2 5, 3 5 (deux triangles homologues). Chercher le point d'intersection de la droite 6 7 et de D_1 que l'on joindra par une droite G_1 au point d'intersection de D_2 et D_3 ;

chercher de même le point d'intersection de 6 7 et de Δ_1 que l'on joindra par une droite G_2 au point d'intersection de Δ_2 et Δ_3 ; la droite qui joint les points (G_1, G_2) et (D_1, Δ_1) passe par le point 8.

La même construction, répétée une fois en permutant les côtés du triangle D_1, D_2, D_3 et de la même manière ceux du triangle $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, donne une seconde droite passant par le point 8.

3. Parmi les autres solutions du même problème, je veux retenir celle que M. Reye a publiée dans le tome suivant du *Journal de Crelle* (t. 100, p. 487) (1). Elle diffère complètement de la précédente, en ce sens surtout qu'elle opère toujours dans l'espace. A première vue, elle paraît plus simple; il y a lieu toutefois de se demander si, en détaillant, comme pour la mienne, chaque élément de la construction on n'arriverait pas à l'opinion contraire. M. Émile Lemoine pourrait seul nous le dire, grâce à ses procédés géométrographiques. La voici :

Avec six des sept points donnés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 former trois couples 1 2, 3 4, 5 6. Par les points i, k d'un de ces couples mener deux transversales rencontrant les deux droites sur lesquelles sont les deux autres couples. Mener par 7 une transversale (ik) qui coupe les deux précédentes. On a ainsi trois droites (1 2), (3 4), (5 6) passant par le point 7 et formant les arêtes d'un trièdre.

Chercher les points d'intersection des droites (1 2), (3 4), (5 6) avec les faces respectivement opposées de ce trièdre, et couper le trièdre par le plan de ces trois points.

On obtient ainsi un triangle dont les côtés rencontrent respectivement les droites (1 2), (3 4), (5 6) en ces trois points et déterminent avec elles trois plans passant par le point cherché.

M. Reye termine en faisant observer que, dans le cas où quatre des points donnés sont dans un même plan, sa solution s'applique encore, mais qu'il y en a une plus simple. Je ne sais s'il l'a publiée ailleurs, mais elle est effectivement si simple qu'il est aussitôt fait de la donner que d'en parler.

Le plan P des quatre points et le plan Q qui passe par les trois

(1) M. Reye glisse légèrement sur l'historique de la question. Suivant lui, elle a été traitée, *pour parler court*, par Caspary et Schröter, qui ont pris pour point de départ les travaux de Hesse, et sa solution est la troisième. On voit que les géomètres non allemands n'existent pas pour le savant professeur de Strasbourg.

autres forment en effet une quadrique passant par les sept points; le huitième point est donc dans l'un des deux plans. Les coniques passant par les quatre premiers points déterminent sur la droite PQ une involution dont deux couples de points conjugués s'obtiennent immédiatement, et comme les couples de points de cette involution sont ceux où la droite coupe toutes les quadriques du système, il en résulte que les coniques de ces quadriques dans le plan Q, lesquelles passent par trois points et sont conjuguées à deux points fixes sur la droite PQ (quatrième condition linéaire), passent par un quatrième point. D'où la construction :

Joindre, dans le plan P, 1 2 et 3 4 qui donnent a et a' sur la droite PQ; joindre de même 1 3 et 2 4 qui donnent b et b' . Joindre, dans le plan Q, 5 6 qui donne c sur PQ; construire (par la règle) ⁽¹⁾, le sixième point c' de l'involution aa' , bb' , c ; la droite cc' passe par le point cherché. Joindre de même 5 7 qui donne d sur PQ; la droite $6d'$ achève de déterminer le point 8.

4. M. Poincaré a aussi demandé dans l'*Intermédiaire* la solution du problème du neuvième point d'un faisceau de cubiques planes. M. Zeuthen, lui répondant, a indiqué une solution de Chasles (*Comptes rendus*, t. XLI) et une solution antérieure de Weddle et Hart (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI). Je croyais, pour ma part, que ce problème avait donné lieu à autant de recherches que le précédent ⁽²⁾; mais une chose m'étonne davantage, c'est que personne n'ait fait remarquer leur identité complète. C'est ce qui semble du moins résulter de ce fait que le rapprochement des deux questions, qui sans doute n'est pas fortuit, n'a pas été en même temps une occasion de souligner leur identité qui est absolue, comme je vais le prouver et comme je l'ai observé depuis longtemps.

5. Considérons les cubiques planes passant par huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et d'un point S pris sur une quadrique (Q), projetons-les coniquement sur cette quadrique, après avoir pris soin de faire passer la surface par les droites qui joignent le point S

⁽¹⁾ Voir ma *Géométrie analytique*, p. 362.

⁽²⁾ A vrai dire, il ne faut pas compter la solution anglaise qui n'est ni linéaire ni projective et a recours notamment à l'emploi de quatrième proportionnelles.

à deux des huit points, 1 et 2 par exemple. Chaque cône projectif, coupant la quadrique suivant deux génératrices, la coupera en outre suivant une quartique (C).

On sait qu'il existe deux espèces de quartiques gauches : une quartique de la première espèce (biquadratique gauche) est l'intersection commune d'une infinité de quadriques ; elle est coupée en deux points, sur chacune de ces surfaces, par toute génératrice de la surface ; au contraire, par une quartique de la seconde espèce il ne passe qu'une quadrique et les génératrices d'un système rencontrent la courbe en un point, tandis que celles de l'autre système la rencontrent en trois points.

Or, il est aisé de voir que la quartique (C) est rencontrée deux fois par toute génératrice de la quadrique (Q). Cette génératrice rencontre, en effet, l'une des deux génératrices S_1, S_2 , la première par exemple, et comme elle coupe en trois points le cône projectif de l'une des cubiques planes, que d'ailleurs ces trois points doivent se trouver sur l'intersection du cône et de la quadrique Q, il en reste deux sur la quartique C, laquelle est, par suite, une biquadratique gauche.

Ainsi, à toutes les cubiques planes données, correspondent sur la quadrique les biquadratiques passant par le point $S^{(1)}$ et les projections $3', 4', 5', 6', 7', 8'$ des points donnés 3, 4, 5, 6, 7, 8. Si l'on admet que toutes les quadriques qui passent par ces sept points passent par un huitième point g' , les biquadratiques suivant lesquelles elles coupent la quadrique Q passeront elles-mêmes par ce point et les cubiques auront dans leur plan un neuvième point commun g , projection conique de g' .

On démontrerait d'une façon analogue que, si l'on admet le théorème sur les cubiques, la représentation plane des figures tracées sur une quadrique permet d'en conclure la proposition relative aux quadriques qui passent par sept points ; d'où il suit que les deux propositions sont identiques.

6. Il résulte de ce qui précède que chacune des constructions connues du huitième point commun à trois quadriques permet de trouver le neuvième point d'un faisceau de cubiques planes.

(¹) Sans quoi, le cône qui les projette serait du quatrième degré.

Comme il est préférable de ramener le problème de l'espace au problème plan, je vais donner une nouvelle solution du huitième point commun à trois quadriques, en m'appuyant sur la solution du problème plan.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés, et (D) la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6). La droite (2 3) coupe D en a ; je joins (a 4). De même la droite (5 6) coupe (D) en b ; je joins (b 1). Les deux couples de droites (b 1) (2 3) et (a 4) (5 6), qui constituent deux coniques ayant une corde commune ab sur la droite d'intersection de leurs plans, déterminent avec le point 7 une quadrique (Q) dont le plan tangent en 7 est défini par les deux droites menées par ce point et rencontrant, la première les génératrices de même système (1 b), (4 a), la seconde les génératrices de l'autre système (2 3), (5 6).

Soient $7'$ et $7''$ les traces de ces deux droites sur le plan (1 2 3); soient $4'$, $5'$, $6'$ les projections sur ce plan des points 4, 5, 6 vus du point 7; soit $8'$ le neuvième point commun dans ce plan à toutes les cubiques qui passent par les points 1, 2, 3, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $7''$. Le point 8 cherché est la projection sur la quadrique (Q) du point $8'$ vu du point 7. D'où la construction suivante :

Tracer la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6); joindre (2 3) qui coupe cette droite en a et tracer (a 4); joindre (5 6) qui coupe cette droite en b et tracer (b 1). Mener par 7 les deux droites $7[(1 b)(4 a)]$ et $7[(2 3)(5 6)]$ dont les traces sur le plan (1 2 3) sont $7'$ et $7''$.

Projeter du point 7 sur le même plan les points 4, 5, 6, en $4'$, $5'$, $6'$. Construire dans ce plan le neuvième point $8'$ commun aux cubiques qui passent par 1, 2, 3, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $7''$. Joindre 7 $8'$ et chercher le second point d'intersection de cette droite avec la quadrique déterminée par le point 7 et les couples de droites $[(1 b)(2 3)]$, $[4 a, 5 6]$.

A cet effet, considérer le plan passant par (7 $8'$) et l'une des génératrices issues de 7, $7[(1 b)(4 a)]$ par exemple. Ce plan coupe la quadrique suivant une autre droite, qui est celle qui joint ses points d'intersection avec les génératrices (2 3) et (5 6); et cette droite rencontre la droite (7 $8'$) au point cherché.

A défaut d'autre mérite, cette solution a tout au moins celui d'affirmer l'identité des deux problèmes. Celui du neuvième point

commun aux cubiques planes est d'ailleurs très simple dans ce cas et se ramène immédiatement, vu la situation particulière des huit points, à celui du quatrième point commun à deux coniques déterminées chacune par cinq points dont trois leur sont communs.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. LAISANT : *Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques.*

M. GENTY adresse une *Note sur des couples de surfaces applicables.*

M. KOENIGS fait la Communication suivante :

Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan.

Je pose le problème du mouvement d'un point dans un plan, en le supposant attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube des distances. Les équations du mouvement

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{A}{x^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{B}{y^3}$$

s'intègrent immédiatement et donnent

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{A}{x^2} + \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{B}{y^2} + \beta;$$

$$(3) \quad x^2 = \alpha(t + \alpha')^2 - \frac{A}{\alpha}, \quad y^2 = \beta(t + \beta')^2 - \frac{B}{\beta}.$$

Les quantités α' , β' , α , β sont des constantes; on peut disposer des données initiales de sorte que α , β soient indifféremment positives ou négatives.

L'élimination du temps entre les équations (3) donne une équation

tion du quatrième degré dont l'ensemble des termes du plus haut degré est

$$\left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}\right)^2;$$

toutes les trajectoires pour lesquelles on a $\alpha\beta < 0$ sont des courbes fermées.

On pourrait s'attendre de prime abord à voir le mobile décrire périodiquement la courbe fermée. Mais le temps est lié algébriquement à x et à y ; le mouvement périodique est impossible.

Supposons $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. L'équation

$$\alpha(t + x')^2 - \frac{A}{\alpha} = 0$$

admet deux racines réelles τ' et $\tau > \tau'$. Pour que la valeur de x^2 soit positive, il faut que t soit compris entre τ' et τ . Donc *le temps dans ce problème ne peut dépasser la valeur τ .*

La raison de ce fait est facile à comprendre. Un mouvement peut être légitimement continué au delà d'une époque τ à la condition expresse que les valeurs de $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ à cette époque τ fournissent les éléments initiaux acceptables d'un mouvement qui sera le prolongement du mouvement antérieur à l'époque τ . Or ici, pour $t = \tau$, on voit que la vitesse et l'accélération sont infinies; on ne peut donc en aucune manière continuer le mouvement au delà de l'époque τ .

Dans un article inséré au tome X du Bulletin de la Société, M. Gascheau a consacré un article à un problème de Poisson sur l'attraction par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance. M. Gascheau a complètement méconnu le principe que je viens d'énoncer. La rédaction du Bulletin a fait suivre cet article d'une Note où elle formule des réserves au sujet de la Note de M. Gascheau; mais il faut bien avouer que cette Note elle-même est gravement fautive, quand elle allègue qu'un corps attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance et tombant en ligne droite sur ce centre fixe rebondira sur lui après la chute pour revenir au point de départ. En réalité, lors de la chute, la force et la vitesse deviennent infinies et l'on n'a plus le droit de continuer le mouvement.

Si l'on envisage le mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la puissance $(m - 1)^{\text{ième}}$ de la distance, où $0 < m < 1$, on reconnaît que la chute a lieu au bout d'un temps fini; la vitesse est finie à l'instant de la chute, mais l'accélération devient infinie. Dans ces conditions, il n'est plus permis d'outrepasser l'époque de la chute.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.

Étant donnée une conique S , une courbe est *autopolaire* par rapport à S quand elle est à elle-même sa polaire réciproque.

1° Il est facile de former l'équation générale des coniques Σ autopolaires par rapport à S ; cette équation contient deux paramètres u et v .

2° Si l'on établit entre u et v une relation, la conique Σ enveloppe une courbe autopolaire par rapport à S . Réciproquement toute courbe autopolaire peut être obtenue de cette façon.

On remarquera l'analogie avec les anallagmatiques de M. Moutard.

Ces considérations, que je développerai ultérieurement, peuvent s'étendre à l'espace.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1894.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Lecornu : *Sur la discontinuité en Mécanique.*

M. Fouret : *Sur le nombre des plans tangents qu'on peut mener à une surface par une droite qui y est située.*

M. D. André : *Sur certaines suites récurrentes.*

M. Touche : *Sur l'équation de continuité en Hydrodynamique.*

M. Humbert : *Sur les fonctions abéliennes intermédiaires.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE M. ARNOUX CONCERNANT L'ÉTUDE DES ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES;

Par M. C.-A. LAISANT.

Preliminaires. — L'un de nos collègues de la Société mathématique, M. Arnoux, ancien officier de marine, s'est livré depuis de longues années à des recherches curieuses sur l'étude des carrés magiques, à laquelle il a donné une extension, fort remarquable à mon avis. Les principes de ses méthodes se trouvent développés dans un volume, actuellement sous presse, intitulé : *Arithmétique graphique; les espaces arithmétiques hypermagiques*, et qui sera probablement publié dans quelques semaines. L'auteur, qui vit dans une petite commune des Basses-Alpes, en dehors du mouvement mathématique contemporain, a bien voulu faire appel à mon amitié pour me demander de l'aider dans la rédaction de ce volume; j'ai donc été conduit à étudier ses méthodes avant qu'elles n'aient été soumises au public, et il m'a semblé intéressant d'en faire connaître la substance à la Société mathématique.

Il y a en effet une telle originalité, une telle puissance d'invention dans les méthodes dont il s'agit, que je serais bien étonné si l'Arithmétique n'arrivait pas quelque jour à les utiliser, soit pour obtenir des démonstrations plus simples de vérités connues déjà, soit pour découvrir des vérités nouvelles.

Pour faire comprendre comment l'auteur pose le problème de l'hypermagic, il faut tout d'abord reproduire quelques définitions qui sont à la base de sa méthode; il importe de bien comprendre en effet que les constructions de carrés magiques, ou d'espaces magiques en général, auxquelles il s'est appliqué, n'ont guère été pour lui qu'une occasion d'utiliser des idées générales, ayant une bien autre portée qu'un simple amusement arithmétique.

Espaces arithmétiques modulaires. — Si l'on imagine une ligne droite sur laquelle sont placés m objets (ou m nombres)

équidistants, et si la figure formée par ces objets se reproduit indéfiniment sur le prolongement de cette droite dans les deux sens, la disposition qui en résulte est appelée par l'auteur un *espace arithmétique à une dimension, de module m* . Dans un tel espace modulaire infini, tous les faits constatés, toutes les nouvelles figures tracées dans un segment quelconque, pareil à celui qui a servi de point de départ, pourront être reproduits dans celui-ci, qui sera en quelque sorte l'*image* de la succession infinie dont nous venons de parler. On représentera ainsi l'espace modulaire infini par une figure comprenant m objets seulement.

Par exemple, soit $m = 5$ et supposons les cinq objets a, b, c, d, e composant l'espace modulaire à une dimension

... $a b c d e a b c d e a b c d e a b c d e a b c d e$...

Si, partant de la première position a pour origine, en prenant pour unité les intervalles consécutifs, nous suivons une *marche* régulière dont le *pas* soit 1, nous trouverons les objets dans l'ordre écrit ci-dessus, c'est-à-dire $a b c d e$ indéfiniment reproduits. Une marche de *pas* 2 donnerait $a c e b d$, le *pas* 3, $a d b e c$, etc... Le *pas* 5, seul, donnerait dans cet exemple, $a a a$..., ou $b b b$..., c'est-à-dire des objets identiques à celui d'où l'on est parti; et toujours la période ainsi obtenue pourra être figurée dans le premier segment $a b c d e$.

Une marche qui rencontre tous les objets différents est dite une *marche magique*. Une marche dont le pas serait 5 ou un multiple de 5 (en général m ou un multiple de m) serait une *marche des identiques*, ou d'*invariation*.

On comprend déjà toute l'analogie qui rattache ces considérations graphiques à la théorie des congruences, que M. Arnoux considère toujours comme de simples équations où l'on doit faire $m = 0$. On voit aussi qu'il y aura une distinction capitale à établir entre les cas où le module est premier et ceux où il est composé. Nous ne nous occuperons à peu près que du cas de m premier, le plus simple de beaucoup, dans cette exposition sommaire.

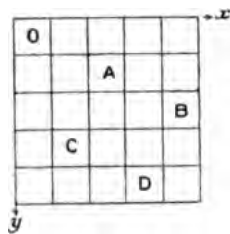
Si, au lieu d'un segment sur lequel sont portés m objets, nous supposons m^2 objets placés sur m segments pareils, parallèles et

équidistants, par exemple dans les m^2 cases d'un carré, et si par la pensée nous imaginons ce carré reproduit identiquement dans le sens de ses deux dimensions, et dans toute l'étendue du plan auquel il appartient, nous aurons de même un espace arithmétique à deux dimensions, de module m , qui trouvera sa représentation ou son image, dans le carré primitif. Une case quelconque de cet espace aura deux coordonnées x, y qui pourront l'une et l'autre être considérées comme plus petites que m , puisqu'il ne faudra jamais prendre que les restes des divisions par m , pour tout ramener au premier carré.

On voit encore qu'un cube de m^3 cases pourra représenter un espace arithmétique de module m à trois dimensions, exactement de la même manière. Un espace à quatre dimensions serait figuré par une collection de m cubes pareils, supposés par exemple rangés en file. L'une quelconque des m^4 cases aurait quatre coordonnées, les trois premières, x, y, z par exemple, indiquant sa position dans son cube, et la quatrième t , le numéro de ce cube dans la file des m cubes. Il est facile de s'élever ainsi à la conception d'un espace arithmétique modulaire à autant de dimensions qu'on voudra, et à la possibilité de représenter matériellement de tels espaces. Nous nous bornerons exclusivement ici aux espaces à deux dimensions, qui suffisent pour donner une idée des principes essentiels, principes faciles à étendre ensuite aux espaces supérieurs.

Directions dans un espace à deux dimensions, de module premier. — Reprenons, pour plus de simplicité, l'exemple

Fig. 1.



de $m = 5$ et supposons un carré de 25 cases. Si, partant de la case origine O située à gauche et en haut, nous choisissons une autre

case quelconque du carré, A, ayant par exemple pour coordonnées $x = 2, y = 1$, et si nous traçons la droite OA sur l'espace indéfini, par les centres des deux cases, nous obtiendrons, en marchant sur cette droite du même pas régulier OA, la succession des cases O, A, B, C, D, indéfiniment reproduites dans le même ordre. On trouvera donc 5 cases différentes, et 5 cases seulement, en suivant cette marche. Il est aisé de se rendre compte de deux faits : le premier, c'est qu'il en serait de même si l'on partait de toute autre case que O ; le second, c'est que, en partant de O, et marchant du pas OA, ou OB, OC, OD, on retombera toujours sur les 5 mêmes cases dans un certain ordre. C'est à un tel groupe, répondant à des cases qui sur l'espace indéfini se trouveraient en ligne droite, qu'on donne le nom de *ligne arithmétique*, de direction donnée; et l'ensemble des lignes arithmétiques de même direction, obtenues en partant des diverses cases, forme une *direction arithmétique*.

On voit, en partant de l'origine O, que la même case ne peut appartenir à deux directions différentes; comme il y a 25 cases en tout (m^2 en général) et que chaque direction partant de O rencontre 4 cases ($m - 1$ en général) non compris O, le nombre des directions possibles est donc $\frac{24}{4} = 6$ (en général $\frac{m^2-1}{m-1} = m + 1$).

Une direction quelconque est caractérisée par les coordonnées a, b de la première case à atteindre en partant de l'origine, et que M. Arnoux représente par le symbole $ax + by$. Il désigne en outre par $((m))$ l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ..., $m - 1$ inférieurs à m , et en écrivant $((m))(ax + by)$ il a l'expression d'une direction arithmétique de l'espace. Par exemple, la direction figurée plus haut s'écrirait $((5))(2x + 1y)$ et exprimerait qu'on rencontre successivement les cases dont les coordonnées sont :

$$\begin{array}{lllll} x. & 0.2 \equiv 0, & 1.2 \equiv 2, & 2.2 \equiv 4, & 3.2 \equiv 1, & 4.2 \equiv 3 \\ y. & 0.1 \equiv 0, & 1.1 \equiv 1, & 2.1 \equiv 2, & 3.1 \equiv 3, & 4.1 \equiv 4 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x. \\ y. \end{array}} \right\} \pmod{5}.$$

Directions magiques, espaces hypermagiques. — Si l'on suppose que le carré représentatif de l'espace à deux dimensions de module m ait ses cases remplies par les m^2 nombres différents

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad m^2 - 1,$$

suivant une disposition quelconque, la somme de tous ces objets est $\frac{m^2(m^2-1)}{2}$. Le quotient de cette somme par m est

$$\frac{m(m^2-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2};$$

c'est ce qu'on appelle la *somme magique* correspondant au module m .

Ceci posé, si chaque ligne comprise dans une direction arithmétique déterminée, dans le carré dont nous venons de parler, contient des éléments dont la somme soit précisément $\frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, on dira que cette direction est *magique*. Et un espace à deux dimensions est *hypermagique*, quand il présente le plus grand nombre possible de directions magiques.

On reconnaît que la définition ordinaire des carrés magiques revient à dire que les *directions* $((m))(1x + 0y)$ et $((m))(0x + 1y)$ sont magiques, et qu'il en est de même des deux *lignes* diagonales du carré.

Si les quatre *directions* $((m))(1x + 0y)$, $((m))(0x + 1y)$, $((m))(1x + 1y)$, $((m))(1x - 1y)$ sont magiques, on a un carré diabolique, selon la définition d'Édouard Lucas, c'est-à-dire un carré magique qui reste encore magique si, après l'avoir sectionné verticalement ou horizontalement, on fait permuter entre elles les deux parties ainsi obtenues.

Position fondamentale principale. — Reprenons encore l'exemple $m = 5$, et supposons que nous ayons écrit les 25 nombres 0, 1, 2, ..., 24 dans leur ordre sur 5 lignes horizontales de manière à former un carré

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Cette disposition, qui s'étend d'elle-même à un module quelconque, est ce que l'auteur appelle la *position fondamentale principale* du carré de module 5.

Cette position fondamentale, si nous employons pour écrire les nombres le système de numération de base 5, deviendra

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

Méthode des abaqués. Transformation en quinconce. — En séparant les deux chiffres, dans la figure précédente, on obtient les deux Tableaux ;

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right\} (\beta)$$

auxquels M. Arnoux donne le nom d'*abaqués*.

Dans le premier abaque, toute direction, à l'exception de celle des x , rencontrera les cinq nombres différents 0, 1, 2, 3, 4 ; de même dans le second, à l'exception de la direction des y . Il en serait encore de même si l'on formait une permutation quelconque des colonnes, ne modifiant pas le premier abaque, ou des lignes horizontales ne modifiant pas le second.

Donc la position fondamentale principale, et toutes celles qui s'ensuivent par permutation des lignes ou des colonnes, sont telles que toutes les directions sont magiques, sauf celles des x et des y . En effet, on aura pour somme des éléments rencontrés par une ligne de direction quelconque (sauf les deux exceptions) : $(0 + 1 + 2 + 3 + 4)5 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4)$, et, en général, $\frac{(m-1)m}{2}m + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, c'est-à-dire précisément la somme magique, qui est 60 dans notre exemple.

La position fondamentale principale donne donc un carré hypermagique, et il en est de même de toutes les positions fondamentales obtenues par permutation, dont nous venons de parler ; mais il faut le modifier si l'on veut lui donner la disposition

habituelle des carrés magiques. Pour cela, on écrira

$$\xi = ax + by, \quad \tau_1 = a'x + b'y,$$

les deux cases $ax + by$ et $a'x + b'y$ ne devant pas appartenir à une même direction en partant de la case origine, et l'on formera le carré nouveau en prenant successivement les éléments contenus dans les cases

$$\begin{array}{ccccccc} 0.\xi + 0.\tau_1, & 1.\xi + 0.\tau_1, & \dots & (m-1).\xi + 0.\tau_1, \\ 0.\xi + 1.\tau_1, & 1.\xi + 1.\tau_1, & \dots & (m-1).\xi + 1.\tau_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.\xi + (m-1).\tau_1, & \dots & \dots & (m-1).\xi + (m-1).\tau_1, \end{array}$$

pour avoir les différentes lignes horizontales du nouveau carré. Cela donne lieu à un calcul des plus faciles, et cela correspond en somme à la formation d'une figure construite dans l'espace modulaire indéfini, en forme de quinconce, en partant des deux bases $ax + by$, $a'x + b'y$.

Soit graphiquement, soit par un calcul tout à fait simple, il est donc possible de construire des carrés hypermagiques qui offriront toujours *deux* directions non magiques. Ces directions seront les transformées des x et des y dans la transformation qui vient d'être indiquée. Il est visible, en effet, que, dans cette transformation, toute ligne droite correspond à une droite, toute direction à une direction, et réciproquement.

Si a , b , a' , b' sont choisis de telle sorte que $1\xi \pm 1\tau_1$ ne soit dirigé ni suivant les x , ni suivant les y , le carré obtenu sera diabolique. Nous nous bornerons à donner ici le résultat obtenu par la transformation $\xi = 2x + 1y$, $\tau_1 = 1x + 2y$:

0	7	14	16	23	$\rightarrow \xi$
11	18	20	2	9	
22	4	6	13	15	
8	10	17	24	1	
19	21	3	5	12	
$\downarrow$					
τ_1					

Les seules directions non magiques sont données par $1\xi + 2\tau_1$ et $2\xi + 1\tau_1$.

Les abaques $(\alpha)(\beta)$ ci-dessus nous ont servi à établir la démonstration, et devraient subir des transformations correspondantes, devenant ainsi (α') et (β') . Le carré hypermagique ci-dessus pourrait se représenter alors symboliquement par $5(\alpha') + (\beta')$ et en général par $m(\alpha') + (\beta')$; cela signifierait qu'à chaque élément de (β') il faut ajouter l'élément correspondant de (α') multiplié par m , pour former le carré définitif. Toute direction magique de ce dernier correspond à une direction magique dans chacun des abaques, d'après la définition donnée pour les espaces à une dimension. Toute direction non magique correspond à une direction d'invariance dans l'un des deux abaques.

Pour la *construction* d'un carré hypermagique, les abaques ne sont pas nécessaires, d'après la transformation en quinconce décrite plus haut. Mais pour l'analyse d'un carré déterminé, cette méthode est pour ainsi dire indispensable et fournit un précieux moyen d'investigation.

Il est vraiment digne de remarque que la position fondamentale principale, si simple à écrire, représente un carré hypermagique au plus haut point, et que cette propriété n'ait pas encore été constatée, malgré les innombrables travaux relatifs à cette question. Je crois que cela tient à deux causes : la première, c'est qu'on a plutôt cherché jusqu'ici des procédés souvent très ingénieux qu'une méthode allant au fond des choses, comme celle de M. Arnoux; la seconde, c'est qu'on a constamment écrit les carrés magiques d'une façon peu rationnelle, en y faisant figurer les nombres $1, 2, 3, \dots, m^2$, au lieu de $0, 1, 2, \dots, m^2 - 1$. Ce simple changement dans le point de départ était de nature à masquer des propriétés qui deviennent très claires avec cette méthode, et qui amènent tout naturellement à l'emploi du système de numération de base m . Il est bien évident, en effet, qu'un espace magique, avec les définitions courantes, reste magique, et, dans les mêmes conditions, si l'on ajoute ou si l'on retranche à tous les éléments un nombre constant quelconque.

Modules composés. Numération à bases multiples. — Nous ne voulons pas même aborder le problème des espaces à modules composés, beaucoup plus complexe, comme nous l'avons dit,

mais nous tenons à faire ressortir une idée très heureuse, à notre avis, dont M. Arnoux a fait usage pour cette étude.

De même qu'il écrit tous les nombres, de 0 à $m^2 - 1$, au moyen de deux chiffres, lorsque le module m est un nombre premier, de même si m est composé, par exemple, de deux facteurs premiers p, q , il sera possible de représenter un nombre N quelconque inférieur à m^2 , de la manière suivante :

Divisons N par q ; le reste q_1 sera inférieur à q , et le quotient N_1 inférieur à $p^2 q$; on aura $N = N_1 q + q_1$. Divisons N_1 par p ; le quotient N_2 sera inférieur à $p q$ et le reste p_1 inférieur à p ; on aura $N_1 = N_2 p + p_1$. De même $N_2 = N_3 p + p_2$, p_2 étant inférieur à p et N_3 inférieur à q ; posant $N_3 = q_2$, on a donc

$$N = q_2 \cdot p^2 q + p_2 \cdot p q + p_1 \cdot q + q_1.$$

C'est-à-dire que N peut s'écrire avec les chiffres p_1, p_2, q_1, q_2 de la manière suivante, qui représente l'expression ci-dessus

$$\begin{array}{cccc} (q) & (p) & (p) & (q) \\ q_2 & p_2 & p_1 & q_1 \end{array}$$

C'est à un semblable système de numération que M. Arnoux a donné le nom de numération à bases multiples. On comprend qu'il y a autant de manières d'écrire ainsi un nombre qu'il y a de permutations distinctes des éléments p, p, q, q , et l'on voit aussi comment ces notions peuvent s'étendre au cas où il y a non plus deux facteurs p, q seulement, mais un aussi grand nombre de facteurs qu'on voudra.

Mais nous tenons à terminer cet exposé, que nous aurions voulu pouvoir abréger plus encore, et nous ne pouvons que renvoyer à l'examen du livre de M. Arnoux ceux que de plus complets développements pourraient intéresser.

NOTE SUR DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES;

Par M. E. GENTY.

Dans une Communication récente, M. Caronnet (1) s'est pro-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 134.

posé de rechercher les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance des points correspondants soit constante. Il a trouvé deux groupes de telles surfaces; dans le premier groupe, les coordonnées d'un point quelconque dépendent de deux fonctions arbitraires de deux paramètres différents; les surfaces du second groupe sont réglées; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même paramètre et sont applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices correspondantes.

Le regretté Ribaucour a étudié depuis longtemps les surfaces du premier groupe. Dans son *Mémoire* (couronné par l'Académie de Bruxelles) *sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, il a établi le lien étroit qui rattache cette théorie avec celle de la correspondance avec la sphère par orthogonalité des éléments, et il a démontré la proposition remarquable dont voici l'énoncé :

Si les extrémités d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre, le plan mené normalement à la corde par son point milieu enveloppe une surface minima.

Nous allons reprendre cette question et montrer avec quelle facilité on peut obtenir les résultats de MM. Ribaucour et Caronnet par les procédés de la Géométrie vectorielle.

Soient ρ et ϖ les vecteurs de deux points correspondants M et P de deux surfaces (S) et (Π). Le point O étant l'origine, on peut construire deux nouvelles surfaces (S_1) et (S_2) en menant par le point M une parallèle à OP et en portant sur cette droite, de part et d'autre du point M, deux longueurs égales à OP.

Les surfaces (S_1) et (S_2) auront pour équation vectorielle

$$\varpi_1 = \rho + \varpi,$$

$$\varpi_2 = \rho - \varpi,$$

et, si l'on veut qu'elles soient applicables l'une sur l'autre, on devra satisfaire à la condition

$$T^2(d\rho + d\varpi) = T^2(d\rho - d\varpi)$$

ou

$$S d\rho d\varpi = 0;$$

on voit donc que la surface (S) et la surface (Π) devront se correspondre par orthogonalité des éléments.

Si l'on suppose que (Π) soit une sphère ayant son centre à l'origine, la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants des surfaces (S_1) et (S_2) sera constante; c'est le résultat obtenu par M. Caronnet.

La recherche de ce groupe de surfaces revient donc à celle des surfaces qui correspondent à la sphère par orthogonalité des éléments. Soit alors

$$ds = v_1 du + v_2 dv$$

l'équation différentielle de la sphère unitaire rapportée aux paramètres de ses lignes de longueur nulle; v étant un orienteur, on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^1 v_1 = 0, \quad T^2 v_2 = 0, \quad S v_1 v_2 = F, \quad V v_1 v_2 = i F v, \\ TV v_1 v_2 = i F, \quad v_{11} = \frac{\partial \log F}{\partial u} v_1, \quad v_{12} = -F v, \quad v_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial v} v_2, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + F = 0,$$

en désignant par les indices 1 et 2, respectivement, les opérations $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ effectuées sur des vecteurs.

Ceci posé, je dis que le vecteur $\frac{v_1}{F}$ est indépendant de u ; il faut démontrer qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v_1}{S v_1 v_2} \right) = 0$$

ou

$$v_{11} S v_1 v_2 - v_1 (S v_{11} v_2 + S v_1 v_{12}) = 0,$$

et l'on voit tout de suite que cette équation est vérifiée.

On reconnaîtrait de même que le vecteur $\frac{v_2}{F}$ est indépendant de v .

Soit alors ρ le vecteur d'une surface correspondant à la sphère par orthogonalité des éléments; on aura identiquement

$$S d\rho ds = 0,$$

d'où

$$S \rho_1 v_1 = 0, \quad S \rho_2 v_2 = 0,$$

$$S \rho_1 v_2 + S \rho_2 v_1 = 0.$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$S\rho_1 \frac{v_1}{F} = 0, \quad S\rho_2 \frac{v_2}{F} = 0,$$

et donnent immédiatement

$$(3) \quad \begin{cases} S\rho v_1 = FV, \\ S\rho v_2 = FU, \end{cases}$$

U et V étant des fonctions de u et de v , respectivement.

La troisième peut s'écrire

$$\frac{\partial S\rho v_2}{\partial u} + \frac{\partial S\rho v_1}{\partial v} = 2S\widehat{\rho v_{12}},$$

ou, en tenant compte des équations (1) et (3),

$$(4) \quad S\widehat{\rho} = -\frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right].$$

Les équations (3) et (4) donnent la solution du problème; si on les résout par rapport à ρ , il vient

$$\rho = Vv_2 + Uv_1 - \frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right] v,$$

et alors les surfaces

$$\begin{aligned} w &= \rho + lv, \\ w &= \rho - lv, \end{aligned}$$

où l est une constante, sont deux surfaces applicables l'une sur l'autre de telle sorte que la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants soit constante.

Si dans l'équation

$$w = \rho + lv$$

on regarde l comme un paramètre variable, elle représentera la congruence des droites M_1, M_2 . Je dis que cette congruence est *isotrope* et que le point ρ est un point de sa surface moyenne.

Il faut, pour cela, qu'on ait identiquement

$$Sd\rho dv = 0;$$

ce qui donne les trois conditions

$$(5) \quad S\rho_1 v_1 = 0, \quad S\widehat{\rho_2 v_2} = 0,$$

$$(6) \quad S\rho_1 v_2 + S\widehat{\rho_2 v_1} = 0.$$

Or, si l'on différentie par rapport à u la première des équations (3), il vient

$$S\rho_1 v_1 = -S\rho v_{11} + V \frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial \log F}{\partial u} S\rho v_1 + V \frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

on verrait de même qu'on a

$$S\rho_2 v_2 = 0.$$

Si enfin on différentie les équations (3) par rapport à v et par rapport à u respectivement, il vient

$$\begin{aligned} S v_1 \rho_2 &= \frac{\partial(FV)}{\partial v} - S \widehat{\rho v_{12}} = \frac{\partial(FV')}{\partial v} + FS v \rho, \\ S \rho_1 v_2 &= \frac{\partial(FU)}{\partial u} - S \widehat{\rho v_{12}} = \frac{\partial(FU)}{\partial n} + FS v \rho, \end{aligned}$$

et l'équation (6) est aussi vérifiée en vertu de l'équation (4).

Je dis maintenant que le plan moyen de la congruence, c'est-à-dire le plan mené par le point M normalement à v , enveloppe une surface minima.

De la valeur trouvée pour le vecteur ρ du point M de la surface moyenne, on déduit très simplement

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_1 = m F v + l v_1, \\ \rho_2 = n F v - l v_2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} m F &= \frac{\partial p}{\partial u} - FV, & n F &= \frac{\partial p}{\partial v} - FU; \\ l &= \frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} - \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right], \end{aligned}$$

et enfin

$$p = -\frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right].$$

Or l'équation du plan moyen est

$$S(\varpi - \rho)v = 0.$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à u et par rapport à v , il vient

$$\begin{aligned} S(\varpi - \rho)v_1 &= m F, \\ S(\varpi - \rho)v_2 &= n F. \end{aligned}$$

En résolvant les trois équations qui précèdent, il vient pour le vecteur du point N de l'enveloppée moyenne

$$\varpi = \rho + m v_2 + n v_1.$$

Le vecteur $m v_2 + n v_1$, qui est évidemment tangent à l'enveloppée moyenne, touche aussi la surface moyenne; on a, en effet,

$$S(m v_2 + n v_1)(m F v + l v_1)(n F v - l v_2) = 0.$$

Donc la droite qui joint le point central d'un rayon d'une congruence isotrope au point de contact du plan moyen avec l'enveloppée moyenne engendre une congruence dont les focales sont la surface moyenne et l'enveloppée moyenne.

Si l'on écrit maintenant que les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 tirées des équations (7) sont égales, on obtient sans difficulté les relations suivantes

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} l F + \frac{\partial(n F)}{\partial u} = 0, & l F - \frac{\partial(m F)}{\partial v} = 0; \\ \frac{\partial l}{\partial u} + m F = 0, & \frac{\partial l}{\partial v} = n F. \end{array} \right.$$

On a d'ailleurs, en tenant compte des relations (1) et (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varpi}{\partial u} &= l v_1 + \frac{\partial m}{\partial u} v_2 + \frac{\partial n}{\partial u} v_1 + n \frac{\partial \log F}{\partial u} v_1 = \frac{\partial m}{\partial u} v_2; \\ \frac{\partial \varpi}{\partial v} &= \frac{\partial n}{\partial v} v_1; \end{aligned}$$

donc les lignes de longueur nulle de l'enveloppée moyenne ont pour image sphérique les lignes de longueur nulle de la sphère, ce qui caractérise les surfaces minima.

L'enveloppée moyenne est donc une surface minima; on aurait pu le démontrer encore en vérifiant directement la relation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + p F = 0,$$

qui exprime que le plan $S v \rho = p$ enveloppe une surface minima,

lorsque u et v sont les paramètres des lignes de longueur nulle de la sphère.

L'équation des lignes asymptotiques de l'enveloppée moyenne est

$$S d\omega dv = 0$$

ou

$$S \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 + \frac{\partial n}{\partial v} v_1 \right) (v_1 du + v_2 dv) = 0,$$

ou enfin

$$(9) \quad \frac{\partial m}{\partial u} du^2 + \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

De même, si v est un vecteur quelconque parallèle à la normale de la surface moyenne, l'équation des lignes asymptotiques de cette surface sera

$$S d\rho dv = 0.$$

Or on a

$$v \parallel V(mFv + lv_1)(nFv - lv_2) \parallel mv_2 - nv_1 - lv,$$

et si l'on prend

$$v = mv_2 - nv_1 - lv,$$

on trouve immédiatement, en tenant compte des relations (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial u} &= \frac{\partial m}{\partial u} v_2 = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \\ \frac{\partial v}{\partial v} &= -\frac{\partial n}{\partial v} v_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial v}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation des lignes asymptotiques de la surface moyenne est

$$S \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du - \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv \right) [(mFv + lv_1)du + (nFv - lv_2)dv] = 0.$$

En développant le premier membre, on retrouve l'équation (9) : donc *les lignes asymptotiques se correspondent sur la surface moyenne et sur l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope.*

On obtient les directions principales et les rayons principaux

de courbure de l'enveloppée moyenne en résolvant l'équation vectorielle

$$d\sigma = R dv,$$

ou

$$\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du + \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv = R(v_1 du + v_2 dv),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial m}{\partial u} du = R dv, \quad \frac{\partial n}{\partial v} dv = R du.$$

Si l'on élimine R entre ces équations, il vient, pour l'équation des lignes de courbure,

$$\frac{\partial m}{\partial u} du^2 - \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

Si, au contraire, on élimine du, dv , il vient

$$R^2 = \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v},$$

ce qui montre de nouveau que l'enveloppée moyenne est bien une surface minima.

Si R et R' sont les rayons principaux de courbure de cette surface, on a

$$RR' = - \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v}.$$

Pour la surface moyenne, l'équation à résoudre prend la forme

$$d\rho = R d\left(\frac{v}{t}\right)$$

ou

$$(10) (mFv + lv_1) du + (nFv - lv_2) dv = \frac{R}{t} \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du - \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv \right) - \frac{R dt}{t^2} v,$$

où l'on a posé

$$t = \bar{v} = \overline{mv_2 - nv_1 - lv} = \sqrt{l^2 - 2mnF}.$$

Si l'on projette l'équation (10) avec les vecteurs $mFv + lv_1$ et $nFv - lv_2$, il vient

$$m^2 F du + (mnF - l^2) dv = \frac{lR}{t} \frac{\partial m}{\partial u} du;$$

$$(mnF - l^2) du + n^2 F dv = \frac{lR}{t} \frac{\partial n}{\partial v} dv.$$

En éliminant du, dv , on obtient pour l'équation aux rayons de courbure principaux

$$\frac{l^2 R^2}{t^2} \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{l R F}{t} \left(n^2 \frac{\partial m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial n}{\partial v} \right) + l^2 t^2 = 0.$$

Si R_1 et R'_1 sont les racines de cette équation, on a

$$R_1 R'_1 = \frac{t^4}{\frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v}},$$

d'où

$$R R' R_1 R'_1 = \frac{D^4}{\sin^4 V},$$

en désignant par V l'angle des normales à la surface moyenne et à l'enveloppée moyenne et par D la distance entre les points correspondants de ces deux surfaces.

Remarquons enfin qu'on a

$$S d\omega dv = 0,$$

ce qui montre que l'enveloppée moyenne et la surface ayant pour vecteur v se correspondent par orthogonalité des éléments; on reconnaît d'ailleurs très simplement que la surface ayant pour vecteur $-iv$ n'est autre que la *surface adjointe* de l'enveloppée moyenne; on a, en effet,

$$-idv = Vd\omega,$$

ce qui met en évidence la proposition.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 MARS 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus à l'unanimité Membres de la Société : M. George Bruce

Halsted, présenté par MM. Poincaré et Craig; M. Balitrand, présenté par MM. Mannheim et Picquet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la composition des lois d'erreur de situation d'un point.*

M. Poincaré : *Sur la question de savoir si les courbes d'un même genre forment une multiplicité continue.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. GOURSAT adresse la Note suivante :

Sur les tangentes à une cubique plane.

Étant donnée une cubique plane sans point double (C), on sait que, par un point M de cette courbe, on peut lui mener quatre tangentes, sans compter celle qui a son point de contact en M; le rapport anharmonique de ces quatre tangentes reste constant lorsque le point M décrit la cubique (C). On possède déjà plusieurs démonstrations de cette remarquable propriété; en voici une autre, qui me paraît assez simple.

Prenons sur la cubique (C) deux points quelconques A et B, qui seront supposés fixes, et un troisième point variable M. Si λ et μ désignent les coefficients angulaires des deux droites AM et BM, il y a évidemment entre λ et μ une relation algébrique et du second degré par rapport à chacune des variables, car, à une valeur de λ correspondent deux valeurs de μ et inversement. Soit

$$(1) \quad \begin{cases} F(\lambda, \mu) = \lambda^2(A\mu^2 + B\mu + C) \\ \quad \quad \quad + \lambda(A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1) + A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2 = 0 \end{cases}$$

cette relation, que l'on peut aussi écrire

$$(2) \quad \begin{cases} F(\lambda, \mu) = \mu^2(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) \\ \quad \quad \quad + \mu(B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2) + C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2 = 0. \end{cases}$$

Si la droite AM devient tangente en M à la cubique, les deux valeurs correspondantes de μ deviennent égales; les coefficients angulaires des quatre tangentes issues du point A sont donc les

racines de l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} R(\lambda) = (B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2)^2 \\ - 4(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2)(C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2) = 0. \end{cases}$$

Les coefficients angulaires des tangentes issues du point B sont de même les racines de l'équation

$$(4) \quad \begin{cases} R_1(\mu) = (A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1)^2 \\ - 4(A\mu^2 + B\mu + C)(A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2) = 0. \end{cases}$$

Tout revient à démontrer que les équations (3) et (4) ont même invariant absolu. Le calcul direct serait un peu long, mais on peut l'éviter comme il suit.

Il est permis évidemment d'effectuer sur λ et sur μ deux substitutions linéaires quelconques, et la proposition sera établie si l'on montre qu'on peut choisir ces deux substitutions linéaires de telle façon que la relation $F(\lambda, \mu) = 0$ soit remplacée par une relation symétrique en λ et μ ; alors, en effet, les deux équations (3) et (4) seront identiques. Soient λ_1 une racine de $R(\lambda) = 0$, et μ_1 la racine double de l'équation $F(\lambda_1, \mu) = 0$; soient de même μ_2 une racine de $R_1(\mu) = 0$, et λ_2 la racine double de l'équation $F(\lambda, \mu_2) = 0$. Posons

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} = \lambda', \quad \frac{\mu - \mu_2}{\mu - \mu_1} = \mu';$$

la relation (1) se change en une nouvelle relation de même forme

$$(5) \quad \begin{cases} f(\lambda', \mu') = \lambda'^2(a\mu'^2 + b\mu' + c) \\ + \lambda'(a_1\mu'^2 + b_1\mu' + c_1) + a_2\mu'^2 + b_2\mu' + c_2 = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda' = 0$, la nouvelle équation en μ' doit avoir une racine double infinie et, de même, pour $\mu' = 0$, l'équation en λ' doit avoir une racine double infinie. Ceci exige que l'on ait $a_2 = b_2 = 0$, $c = c_1 = 0$. La relation (5) est donc de la forme

$$f(\lambda', \mu') = a\lambda'^2\mu'^2 + \lambda'\mu'(b\lambda' + a_1\mu' + b_1) + c_2 = 0.$$

Si aucun des coefficients b , a_1 n'est nul, il suffit de remplacer μ' par $\frac{b}{a_1}\mu'$ pour être ramené à une relation symétrique entre λ' et μ' , et la proposition est établie.

Aucun des coefficients b , a_1 ne peut être nul. Si, par exemple, on avait $b = 0$, l'équation $f(\lambda', \mu') = 0$ aurait, pour $\mu' = 0$, une racine double infinie en λ' , et, pour $\lambda' = \infty$, une racine double nulle en μ' . Les deux droites correspondantes AM et BM rencontreraient chacune la cubique en deux points confondus en M; ce point serait nécessairement un point double. On arrive à la même conclusion en supposant $a_1 = 0$.

M. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution.

Soient (S) et (S₁) deux surfaces qui se correspondent ponctuellement dans les conditions suivantes : M étant un point quelconque de (S) et M₁ le point qui lui correspond sur (S₁), deux éléments correspondants MM', M₁M'₁ et la normale en M sont parallèles à un même plan.

Est-il possible de choisir les deux surfaces (S) et (S₁) de telle manière que les droites MM₁ soient tangentes en M à la première?

Pour répondre à cette question, rapportons la surface (S) aux courbes ($v = \text{const.}$), auxquelles les droites MM₁ seront tangentes, et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$); son élément linéaire sera de la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2.$$

Soient Mx , My les tangentes aux lignes coordonnées, et Mz la normale à la surface; les coordonnées du point M₁ sont ($x, 0, 0$). On a, pour les composantes du déplacement infiniment petit du point M,

$$A du, \quad C dv, \quad 0,$$

et, pour celles du déplacement correspondant de M₁(¹),

$$dx + A du, \quad C dv + (r du + r_1 dv)x, \quad -(q du + q_1 dv)x.$$

Nous exprimerons toutes les conditions du problème en écrivant que le déplacement du point M est parallèle à la projection

(¹) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 385.

du déplacement du point M_1 sur le plan xMy , ce qui donnera

$$\frac{dx + \Lambda du}{\Lambda du} = \frac{C dv + (r du + r_1 dv)x}{C dv}.$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient du et dv , on en conclut, en tenant compte des valeurs de r et de r_1 ,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\Lambda}{C} \frac{\partial \Lambda}{\partial v} x = 0, \\ C \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ C \frac{\partial x}{\partial u} - x \frac{\partial C}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$A = U, \quad x = U_1, \quad C = U_1 V,$$

U et U_1 désignant des fonctions arbitraires de u et V une fonction arbitraire de v .

Nous arrivons donc à cette conclusion : Pour que la surface (S) satisfasse à la question, il est nécessaire et il suffit que son élément linéaire soit de la forme

$$ds^2 = U^2 du^2 + U_1^2 V^2 dv^2.$$

La surface (S) choisie, la surface (S_1) sera le lieu du point $(U_1, 0, 0)$.

Il suffit de poser

$$\int U du = \alpha, \quad \int V dv = \beta,$$

pour ramener l'élément linéaire ci-dessus à la forme la plus générale de l'élément linéaire des surfaces de révolution, savoir

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha) d\beta^2.$$

Les équations (1) donnent ensuite

$$MM_1 = m\sqrt{A(\alpha)},$$

m désignant une constante arbitraire.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces (S) et (S₁) se correspondent ponctuellement de telle manière que deux éléments correspondants MM', M, M', et la normale en M soient parallèles à un même plan; si, en outre, les droites MM₁ sont tangentes à la surface (S), cette dernière sera applicable sur une surface de révolution. L'élément linéaire ayant été ramené à la forme

$$ds^2 = dx^2 + A(x) d\beta^2,$$

les droites MM₁ seront tangentes aux lignes $\beta = \text{const.}$, et l'on aura $MM_1 = m\sqrt{A(x)}$, m désignant une constante.

Réciproquement, si une surface (S) est applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire

$$ds^2 = dx^2 + A(x) d\beta^2,$$

et si l'on porte, à partir de chaque point M de la surface (S), sur la tangente à la courbe $\beta = \text{const.}$ qui passe en ce point, une longueur $MM_1 = m\sqrt{A(x)}$, m désignant une constante, le lieu du point M₁ sera une surface (S₁) qui correspondra à la surface (S) dans les conditions indiquées ci-dessus.

SÉANCE DU 21 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. D. André : *Sur la structure des permutations.*

M. Antomari : *Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.*

M. Ém. Picard adresse une Note *Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires.*

SÉANCE EXTRAORDINAIRE DU 30 MARS 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Pellet : *Sur les équations solubles par radicaux.*

M. Pellet : *Sur les équations numériques et les fonctions implicites.*

M. ANDRADE communique la Note suivante :

Note sur les intégrales de M. Schwarz.

Si l'on considère la suite infinie de fonctions $V_0, V_1, V_2, \dots$ s'annulant toutes sur la surface qui limite un volume D , et satisfaisant, à l'intérieur de ce volume, aux équations

$$(1) \quad \Delta V_{i+1} + V_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

et si l'on envisage les intégrales de volume relatives au domaine D ,

$$W_{m,n} = \int V_m V_n d\tau,$$

le théorème de Green montre immédiatement que ces intégrales sont toutes positives et que l'on a

$$W_{m,n} = W_{0,m+n}.$$

De plus, on aura

$$(2) \quad \frac{W_{01}}{W_{00}} < \frac{W_{02}}{W_{01}} < \frac{W_{03}}{W_{02}} < \dots;$$

c'est là un théorème de M. Schwarz dont j'ai trouvé une démonstration qui, paraît-il, est nouvelle, et, comme elle est fort simple, peut-être lui accordera-t-on quelque intérêt.

En raison de la relation $W_{m,n} = W_{0,m+n}$, il suffit d'établir les deux premières inégalités (2).

Soient λ, μ, ρ les valeurs des trois premiers rapports. Nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} \int V_0 V_1 d\tau - \lambda \int V_0^2 d\tau &= 0, \\ \int V_0 V_2 d\tau - \mu \int V_0 V_1 d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Remplaçant $\int V_0 V_2 d\tau$ par $\int V_1^2 d\tau$, et posant $V_1 = V_0 + \varepsilon_0$, nous obtenons

$$(1 - \lambda) \int V_0^2 d\tau + \int V_0 \varepsilon_0 d\tau = 0,$$

$$(1 - \mu) \int V_0^2 d\tau + (2 - \mu) \int V_0 \varepsilon_0 d\tau + \int \varepsilon_0^2 d\tau = 0;$$

d'où, en éliminant l'intégrale $\int V_0 \varepsilon_0 d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous tirons

$$[\lambda - \mu - (1 - \lambda)(1 - \mu)] \int V_0^2 d\tau + \int \varepsilon_0^2 d\tau = 0,$$

et, par suite,

$$(3) \quad \lambda - \mu - (1 - \lambda)(1 - \mu) < 0,$$

inégalité non homogène. Là est le point essentiel de ma démonstration.

Pareillement, nous avons la relation

$$\int V_1 V_2 d\tau - \rho \int V_0 V_2 d\tau = 0,$$

que nous pourrions écrire

$$(1 - \rho) \int V_0 V_2 d\tau + \int \varepsilon_0 V_2 d\tau = 0.$$

Si nous posons $V_2 = V_1 + \varepsilon_1$, elle devient

$$(1 - \rho) \int V_0 V_2 d\tau + \int \varepsilon_0 \varepsilon_1 d\tau + \int \varepsilon_0 V_1 d\tau = 0.$$

D'autre part, en écrivant ainsi l'équation de définition de μ ,

$$(1 - \mu) \int V_1^2 d\tau + \mu \int \varepsilon_0 V_1 d\tau = 0,$$

et éliminant, entre les deux dernières équations écrites, l'intégrale $\int \varepsilon_0 V_1 d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous aurons

$$[\mu(1 - \rho) + \mu - 1] \int V_1^2 d\tau + \mu \int \varepsilon_0 \varepsilon_1 d\tau = 0.$$

Or, comme la suite $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ jouit évidemment des mêmes pro-

priété que la suite des fonctions V , l'intégrale $\int_{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d\tau$ est positive; donc on a

$$(4) \quad \mu(1-\rho) + \mu - 1 < 0.$$

Les inégalités (3) et (4) n'étant pas homogènes en λ, μ, ρ , une remarque fort simple achève la démonstration.

Si l'on fait sur le domaine $\bar{D}$ une transformation homothétique à l'échelle k , et si l'on fait sur les fonctions $V_0, V_1, V_2, \dots$ la substitution

$$V_n \mid k^{2n} V_n,$$

qui laisse inaltérée la suite des équations (1), les inégalités (2) à démontrer ne changent pas; car si les rapports λ, μ, ρ se changent en λ', μ', ρ' , on a visiblement

$$\lambda^2 = k^2 \lambda', \quad \mu = k^2 \mu', \quad \rho = k^2 \rho'.$$

Considérons les inégalités (3) et (4), où λ', μ', ρ' remplaceraient λ, μ, ρ , nous pourrions faire $\mu' = 1$. Elles donnent alors, la première $\mu' > \lambda'$, la seconde $\rho' > \mu'$; donc enfin $\lambda < \mu < \rho$.

C. Q. F. D.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

Par M. ÉMILE PICARD.

1. On considère le système de n équations différentielles

[illegible]

où les fonctions f sont des fonctions continues des quantités

réelles $x, u, v, \dots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \dots, w_0$, définies quand $x, u, \dots, w$ restent respectivement comprises dans les intervalles

$$(x_0 - a, x_0 + a), (u_0 - b, u_0 + b), \dots, (w_0 - b, w_0 + b),$$

a et b étant deux constantes positives. De plus, on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives $A, B, \dots, L$ telles que

$$|f_i(x, u', v', \dots, w') - f_i(x, u, v, \dots, w)| < A |u' - u| \\ + B |v' - v| + \dots + L |w' - w|,$$

x , ainsi que les $u, v, \dots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Soit enfin M la valeur absolue maxima de la fonction pour le domaine dans lequel elle est définie. J'ai établi autrefois (*voir mon Traité d'Analyse*, t. II, p. 3b1) qu'on pouvait, en procédant par approximations successives, obtenir sous forme de séries convergentes les intégrales du système (S) prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. Ces séries convergent certainement dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ étant la plus petite des trois quantités $a, \frac{b}{M}, \frac{1}{A+B+\dots+L}$.

Tout récemment, M. Lindelöf⁽¹⁾ vient de montrer qu'on pouvait supprimer la troisième expression en modifiant seulement très peu les raisonnements tout élémentaires dont j'avais fait usage, et M. Bendixon⁽²⁾ était arrivé, de son côté, par une autre voie, au même résultat. On peut donc dire que la convergence des séries fournies par les approximations successives correspond à la plus petite des deux quantités a et $\frac{b}{M}$.

L'intervention de la seconde de ces deux quantités provient de ce que les valeurs de $u, \dots, w$ données par les approximations successives ne doivent pas sortir du champ pour lequel les fonctions f sont définies. Si, notamment, les fonctions f sont définies pour toute valeur de $u, v, \dots, w$, nous n'aurons pas à nous préoccuper du quotient $\frac{b}{M}$, cela, toutefois, sous la réserve de l'exis-

(1) E. LINDELÖF (*Comptes rendus*, 26 février 1894).

(2) I. BENDIXON (*Académie des Sciences de Stockholm*, novembre 1893).

tence des quantités finies $A, \dots, L$ qui continuent à intervenir dans les raisonnements, si elles ne figurent plus dans les conclusions.

Toutes ces considérations s'étendent d'elles-mêmes au cas où les fonctions seraient définies pour des valeurs complexes des lettres dont elles dépendent. Dans ce qui va suivre, la variable x restera réelle, mais les f pourront dépendre d'éléments complexes, et les fonctions $u, v, \dots, w$ seront des fonctions complexes d'une variable réelle. On doit alors, dans ce qui précède, remplacer les valeurs absolues par des modules.

2. Appliquons ces généralités aux équations différentielles linéaires. L'équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_m(x) y = 0$$

rentre dans les conditions d'application de la méthode précédente. Si, dans l'intervalle $(0, a)$, les coefficients $A_1, \dots, A_m$ sont des fonctions continues de x , nous pouvons bien trouver les quantités déterminées $A, B, \dots, L$ du paragraphe précédent, et *les approximations successives donneront une série convergente pour toute intégrale dans l'intervalle $(0, a)$* . De plus, si nous désignons, comme nous le faisons d'habitude, cette série par

$$(\Sigma) \quad y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots,$$

on aura, d'après la théorie générale,

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{H^n x^n}{1.2 \dots n} \quad (H = A + B + \dots + L).$$

L'expression analytique de toute intégrale, donnée par la méthode des approximations successives, et *valable pour tout intervalle dans lequel les coefficients $A_1(x), \dots, A_m(x)$ sont continus*, permet de démontrer facilement quelques théorèmes généraux et de faire diverses recherches sur les équations linéaires.

3. Supposons que les coefficients $A_1(x), \dots, A_m(x)$ dépendent d'un paramètre arbitraire k , et qu'ils soient, pour x variant entre 0 et a , des fonctions entières de ce paramètre, c'est-à-dire holo-

morphes dans tout le plan de la variable complexe k . C'est une circonstance qui se présentera souvent, particulièrement en Physique mathématique. Je me propose de montrer que *toute intégrale de l'équation est, pour x variant entre 0 et a , une fonction entière de k .*

Chaque terme de la série (Σ) est manifestement une fonction entière de k ; il faut établir que la série sera aussi une fonction entière. Supposons que k reste à l'intérieur d'un cercle C de rayon d'ailleurs arbitraire ayant l'origine pour centre; dans ces conditions, la quantité H aura un certain maximum, que nous désignerons par la même lettre. Nous avons donc une série

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

dont chaque terme est une fonction holomorphe de k dans C , et l'on a de plus

$$(1) \quad |u_n| < \frac{H^n a^n}{1.2 \dots n}.$$

Ceci posé, la formule fondamentale de Cauchy donne

$$u_n(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(z) dz}{z - k},$$

et l'on aura, par suite, puisque la série des u est d'après (1) uniformément convergente,

$$u_0(k) + \dots + u_n(k) + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_0(z) + \dots + u_n(z) + \dots}{z - k} dz,$$

ce qui montre que le premier membre est une fonction holomorphe de k dans C , comme nous voulions l'établir.

4. Une seconde application de la méthode des approximations successives nous sera fournie par les équations linéaires à coefficients périodiques. Bornons-nous, pour abréger, à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A_1(x) \frac{dy}{dx} + A_2(x) y = 0,$$

et supposons que les fonctions A_1 et A_2 soient continues pour toute valeur réelle de x et admettent la période ω .

Il est bien connu qu'il y a, en général, un système d'intégrales se reproduisant multipliées par des constantes μ_1 et μ_2 quand on change x en $x + \omega$. La formation de l'équation du second degré donnant μ_1 et μ_2 est un problème important et difficile dans la théorie des équations à coefficients périodiques. On peut procéder comme il suit. Partons de deux solutions arbitraires $f_1(x), f_2(x)$, représentées par les développements en séries, *valables pour toute valeur réelle de x* , que fournissent les approximations successives. Nous pouvons considérer ces solutions comme connues. On cherche alors une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

qui se reproduise à un facteur constant près, par le changement de x en $x + \omega$. Il faut, pour cela, avoir la substitution résultant du changement de x en $x + \omega$ dans f_1 et f_2 , c'est-à-dire les coefficients a, b, c, d tels que

$$\begin{aligned} f_1(x + \omega) &= a f_1(x) + b f_2(x), \\ f_2(x + \omega) &= c f_1(x) + d f_2(x). \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= a f_1(0) + b f_2(0), \\ f_1(2\omega) &= a f_1(\omega) + b f_2(\omega); \end{aligned}$$

ces deux équations donnent a et b , et l'on aura pareillement c et d .

Quant à l'équation donnant μ_1 et μ_2 , on sait qu'elle se réduit à

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Les constantes a, b, c, d peuvent donc être calculées *numériquement* avec telle approximation que l'on veut. De plus, si les coefficients $A_1(x)$ et $A_2(x)$ dépendent d'un ou plusieurs paramètres, on pourra connaître la façon dont a, b, c, d dépendent de ce paramètre, puisque l'on a une représentation, non seulement *numérique*, mais aussi *analytique* des deux solutions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ dont on est parti.

Un cas d'exception peut se rencontrer dans le calcul précédent : c'est celui où l'on aurait

$$\frac{f_1(0)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2(0)}{f_2(\omega)};$$

mais alors on a une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \omega$, et cette solution se reproduit précisément, à un facteur constant près, quand on change x en $x + \omega$.

5. Les calculs précédents peuvent être employés pour la solution d'une question d'apparence différente, mais identique au fond. Prenons, en nous bornant encore au second ordre, pour abréger l'écriture, l'équation

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + A_1(z) \frac{du}{dz} + A_2(z) u = 0,$$

où nous supposons que $A_1(z)$ et $A_2(z)$ soient deux fonctions holomorphes de z dans la couronne comprise entre deux circonférences C et C' ayant l'origine pour centre et les rayons R et R' ($R > R'$). Il existe, en général, deux solutions dans cette couronne, se reproduisant, à un facteur constant près, quand z tourne dans la couronne autour du cercle C' . Les coefficients de l'équation du second degré donnant ces facteurs constants jouent un rôle important et ont un caractère invariant; on pourra consulter sur ce sujet un très intéressant Mémoire de M. von Koch (*Acta Mathematica*, t. XV).

Ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent pourra être appliqué ici. Posons, en effet,

$$z = re^{i\theta}, \quad (R > r > R').$$

On peut regarder θ comme seule variable, et nous avons alors une équation où les coefficients sont des fonctions de la variable réelle θ et ont 2π pour période. Nous sommes donc ramené à la recherche faite plus haut.

Du théorème du § 3, on conclut de suite que, si les fonctions $A_1(z)$, $A_2(z)$ sont des fonctions entières d'un certain nombre de paramètres, les coefficients de l'équation en u seront des fonctions uniformes de ces paramètres.

**SUR LES SURFACES RÉGLÉES APPLICABLES AVEC PARALLÉLISME
DES GÉNÉRATRICES;**

Par M. X. AN TOMARI.

Dans une Communication faite il y a quelque temps à la Société mathématique, M. Caronnet a étudié les couples de surfaces applicables dont la distance des points correspondants demeure constante. Il a trouvé deux catégories de surfaces jouissant de cette propriété et les surfaces de l'une de ces catégories sont des couples de surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices. Je me propose de montrer, dans cette Note, comment on peut obtenir les surfaces de cette catégorie en faisant usage de la méthode que j'ai suivie dans ma thèse pour étudier les surfaces réglées, et dont je rappellerai brièvement le principe.

1. Pour étudier une surface réglée, je prends comme variable indépendante l'arc t de la représentation sphérique du cône directeur de la surface, et j'introduis trois fonctions de cet arc, que j'appelle les trois invariants de la surface, que je désigne par les lettres θ , h et k et qui sont définies de la manière suivante :

θ est la courbure géodésique de la représentation sphérique du cône directeur ;

h et k sont les quotients respectifs par dt (angle de deux génératrices infiniment voisines) des projections, sur la génératrice et sur la normale au plan asymptote, du déplacement infiniment petit du point central sur une génératrice. J'ajoute que k n'est autre chose que le paramètre de distribution des plans tangents.

2. Soit OX une génératrice mobile sur la surface, O désignant le point central sur cette génératrice.

Imaginons un premier trièdre trirectangle fixe (o, xyz) , et un autre trièdre trirectangle mobile (O, XYZ) présentant la même disposition que le premier et dont les arêtes respectives sont : la génératrice OX , la normale OZ au plan asymptote menée par le point central et la normale OY à la génératrice menée par le même point dans le plan asymptote ; puis appelons α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe OX rapporté au trièdre fixe, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ceux de

OY et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ceux de OZ, ces neuf cosinus étant supposés définis en fonction de t . Appelons enfin x, y, z les coordonnées, fonctions de t , du point central O, rapporté au trièdre fixe (o, xyz) .

En vertu de la définition de h et de k , on voit immédiatement que la ligne de striction de la surface est définie par l'équation

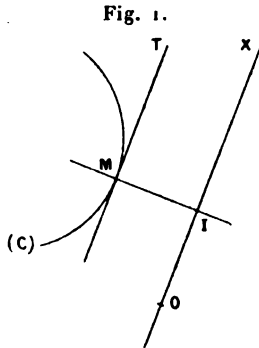
$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2) dt$$

et par deux autres équations analogues. On voit du reste aussi qu'un point quelconque de la surface est défini par l'équation

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2) dt + \lambda\alpha,$$

et par deux autres équations analogues.

3. Considérons une surface réglée dont le cône directeur ne soit pas un plan et soit (C) (*fig. 1*) l'arête de rebroussement de la



développable circonscrite à l'infini. A tout point M de cette courbe il correspond une génératrice de la surface réglée, parallèle à la tangente en M à la courbe (C) et située, bien entendu, dans le plan osculateur en M à cette courbe. Soit OX cette génératrice et soit MI la perpendiculaire à cette droite menée par M. Désignons par l le segment algébrique $MI = l$, par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de la courbe (C) en M.

On trouve sans peine :

1° Que l'invariant θ est égal au quotient $\frac{\rho}{\tau}$;

2° Que l'on a les formules

$$k = -\theta l, \quad h = \rho - (l + l''), \quad \left(l' = \frac{d^2 l}{dt^2} \right);$$

3° Que si O est le point central sur OX, on a

$$10 = \frac{dl}{dt}.$$

4. Inversement, il est clair que toute courbe gauche peut être considérée comme l'arête de rebroussement de la développable asymptote à une surface réglée. Les formules précédentes définissent les invariants de la surface en fonction de la courbure et de la torsion de la courbe.

Lorsque la développable asymptote est un cône, la courbe (C) se réduit à un point et l'on voit sans difficulté comment on passe du cône asymptote à la surface réglée.

5. Si l'on désigne par λ l'abscisse, par rapport au point central, d'un point situé sur une génératrice d'une surface réglée, l'élément linéaire de la surface prend la forme simple

$$dS^2 = d\lambda^2 + 2hd\lambda dt + (h^2 + k^2 + \lambda^2)dt^2.$$

Toutes les propriétés des surfaces réglées, au point de vue de l'applicabilité, résultent de ce que cette expression de l'élément linéaire ne dépend que de h et de k . On voit, en particulier, qu'elle ne change pas quand on change k en $-k$, ce qui conduit immédiatement à la notion des surfaces réglées applicables génératrice par génératrice, et avec parallélisme de ces droites. Si la ligne de striction d'une surface réglée (R) est définie par les équations analogues à

$$(1) \quad x = \int (h x + k x_2) dt,$$

celle de la surface (R') qui lui est applicable avec parallélisme des génératrices est définie par les équations analogues à

$$(2) \quad x_1 = \int (h x - k x_2) dt.$$

Voici d'abord quelques conséquences simples de ces formules.

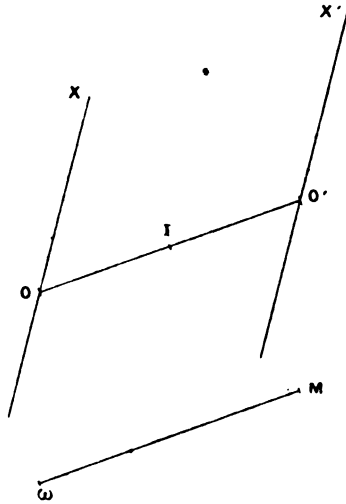
6. Supposons que k et h soient constants, ce qui revient à supposer, comme il est facile de s'en assurer, que (R) et (R') sont applicables sur l'hyperboloïde de révolution, et formons les expressions analogues à $\frac{x+x_1}{2}$ et à $\frac{x-x_1}{2}$; nous obtenons

$$(3) \quad \frac{x+x_1}{2} = \int h \alpha dt = h \int \alpha dt,$$

$$(4) \quad \frac{x-x_1}{2} = \int k \alpha_2 dt = k \int \alpha_2 dt.$$

Soient O et O' (fig. 2) les points centraux correspondants de (R)

Fig. 2.



et de (R') , et soit I le milieu de OO' ; les formules analogues à (3) signifient que la trajectoire du point I est une courbe à *courbure constante*. Pareillement, si par un point fixe ω on mène le vecteur ωM parallèle et égal à OO' , les formules analogues à (4) montrent que le lieu du point M est une courbe à *torsion constante*.

On serait conduit, bien entendu, à des résultats analogues si h seul ou k seul était constant.

7. Arrivons maintenant aux surfaces réglées applicables géné-

ratrice par génératrice et de telle sorte que la distance des points correspondants demeure constante.

Il est clair d'abord que les génératrices correspondantes devront être parallèles; les lignes de striction des deux surfaces seront donc définies par les formules (1) et (2). Appelons, comme plus haut, (R) et (R') les deux surfaces, O et O' (fig. 2) les points centraux correspondants, ωM le vecteur égal et parallèle à OO' mené par un point fixe ω . Par hypothèse la longueur ωM est constante; il en résulte que la tangente en M à la trajectoire de ce point est perpendiculaire à ωM . Mais des formules (1) et (2) on déduit que $x - x_1 = 2 \int k \alpha_2 d\ell$; d'où il suit que la tangente en M à la trajectoire de ce point est parallèle à la direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. La direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est donc perpendiculaire à OO' et aux génératrices OX et O'X' des deux surfaces menées respectivement par O et O'; il en résulte qu'elle est perpendiculaire au plan de ces deux droites. Or, le plan mené par OX perpendiculairement à la direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est le plan asymptote à la surface (R); pareillement le plan mené par O'X' perpendiculairement à $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est le plan asymptote à la surface (R'). Donc ces deux plans coïncident et les deux surfaces sont inscrites dans la même développable asymptote; par suite, on peut les obtenir toutes deux en partant de la même courbe gauche, par le mode de description indiqué au n° 4. Appelons θ, h et k les invariants de (R); ceux de (R') sont θ, h et $-k$. Mais si l'on désigne par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de la développable asymptote commune, par l et l_1 les deux segments qui permettent de passer de cette courbe aux deux surfaces respectives (n°s 3 et 4), on a

$$k = -l \frac{\rho}{\tau}, \quad -k = -l_1 \frac{\rho}{\tau};$$

il en résulte

$$l_1 = -l.$$

D'autre part on a aussi

$$h = \rho - (l + l')$$

et

$$h = \rho - (l_1 + l_1').$$

On en déduit facilement

$$l + l' = 0$$

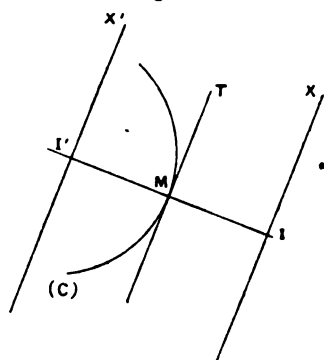
et enfin

$$l = A \sin(t + B),$$

A et B désignant des constantes.

D'après cela, pour obtenir tous les couples de surfaces cherchées, on partira d'une courbe gauche quelconque (C) (fig. 3); puis sur

Fig. 3.



la normale principale en un point M, variable sur cette courbe, on portera $MI = A \sin(t + B)$, $MI' = -A \sin(t + B)$ et l'on mènera IX et I'X' parallèles à la tangente MT. Quand le point M parcourt la courbe (C), les droites IX et I'X' engendrent les deux surfaces (R) et (R') répondant à la question.

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ);

Par M. L. RAFFY.

Les recherches que je vais résumer se rapportent à une classe très étendue de surfaces dont la propriété caractéristique ne semble pas avoir été remarquée avant Jacobi. Elle consiste dans la possibilité, pour leur élément linéaire, d'acquérir la forme

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

les U étant des fonctions de la seule variable u, et les V de v. Ce n'est pas ici le lieu de rappeler comment Jacobi, ayant ramené à cette forme l'élément linéaire des quadriques, a déterminé les lignes géodésiques de ces surfaces; ni comment Liouville a étendu

à toutes les surfaces de la classe ce résultat important, extension qui pouvait, comme on sait, s'obtenir sans modifier en quoi que ce fût la méthode de Jacobi. Ainsi se trouvait fondée la théorie des surfaces dont nous allons nous occuper et que nous proposons d'appeler *surfaces harmoniques*. On pensera avec nous que cette dénomination est amplement justifiée, qu'elle s'impose presque, si l'on veut bien être attentif à l'identité des problèmes fondamentaux concernant l'élément linéaire de ces surfaces et les équations qui ont reçu le nom d'*équations harmoniques*. Je n'insisterai pas sur cette identité, qui se manifeste à toutes les pages du chapitre que M. Darboux consacre à ces équations dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (1).¹ Il était d'ailleurs indispensable de rappeler par un adjectif la propriété de ces surfaces, pour pouvoir caractériser brièvement celles qui la possèdent à divers titres. Il existe, en effet, des surfaces dont l'élément linéaire peut être ramené de *deux* manières différentes, et, par suite, d'une infinité de manières, à l'une des formes équivalentes

$$\begin{aligned} ds^2 &= (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2), \\ ds^2 &= (U - V)(du^2 + dv^2), \\ ds^2 &= [\varphi(x + y) - f(x - y)] dx dy. \end{aligned}$$

qui seront pour nous les *formes harmoniques*. À ces surfaces nous donnons le nom de surfaces *doublement harmoniques*. Les surfaces *simplement harmoniques* sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les éléments linéaires sont désignés comme les surfaces auxquelles ils appartiennent.

Bien que Liouville eût appelé l'attention sur les surfaces harmoniques en étudiant leurs géodésiques et en déterminant les formes harmoniques de l'élément linéaire du plan, la théorie de ces surfaces semble avoir été délaissée jusqu'à l'époque où M. Massieu, s'occupant après M. Bertrand des intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique, fit connaître, dans sa thèse (1861), deux propositions de la plus haute importance, relatives, la première aux surfaces de révolution, qui sont des surfaces harmoniques particulières ($f = 0$), la seconde aux surfaces

(1) B. LIX, IV, CHAP. IX.

harmoniques proprement dites. Les résultats de M. Massieu se trouvant exposés, complétés même, dans l'ouvrage de M. Darboux ⁽¹⁾, nous ne les transcrivons pas ici tout au long. Nous prenons d'ailleurs le second comme point de départ de toute notre première partie.

Quelques années après M. Massieu, Ossian Bonnet, dans l'importante *Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* ⁽²⁾, s'est occupé incidemment des surfaces harmoniques. Il a montré que les quadrriques sont les seules surfaces dont l'élément linéaire acquière la forme harmonique quand on les rapporte aux paramètres u et v de leurs lignes de courbure.

M. Dini ⁽³⁾ a fait connaître en 1869 cette propriété générale des surfaces harmoniques : *Si deux surfaces sont telles qu'il existe entre les points réels de l'une et ceux de l'autre une correspondance conservant les lignes géodésiques, ces deux surfaces sont harmoniques*. On dit qu'on peut faire la *représentation géodésique* de l'une sur l'autre.

C'est peut-être en étudiant de plus près ce problème de la représentation géodésique, sans exclure les correspondances imaginaires, que M. Lie a été conduit à la recherche toute différente des transformations infinitésimales qui conservent les géodésiques d'une même surface. Il a publié sur cette question un *Mémoire* étendu ⁽⁴⁾ dont nous parlerons plus loin, et dans lequel apparaît la notion d'élément linéaire doublement harmonique. Nous n'en retiendrons ici qu'une proposition détachée (note 5), sur laquelle nous n'aurons pas à revenir : *Toute surface minima, qui est en même temps une surface harmonique, est applicable sur une surface de révolution*.

Plus récemment encore, M. Darboux, dans son ouvrage déjà cité (Livre IV, Chap. IX), a fait connaître un élément linéaire réductible d'une infinité de manières à la forme harmonique; et il a signalé comme devant faire le sujet d'une recherche difficile

⁽¹⁾ T. III, Livre VI, Chap. II.

⁽²⁾ *Journal de l'École Polytechnique*, 42^e Cahier; 1867.

⁽³⁾ *Annali di Matematica*, t. III.

⁽⁴⁾ *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX; 1882).

la détermination générale de tous les éléments linéaires jouissant de la même propriété. En outre, il a indiqué (Livre VI, Chap. II) un moyen d'obtenir ceux de ces éléments linéaires qui conviennent à des surfaces de révolution.

Dans un tout autre ordre d'idées, M. Weingarten a obtenu deux résultats de la plus haute importance. Il a d'abord ⁽¹⁾ déterminé *toutes* les surfaces admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2(u - v^2) dv^2,$$

qui est harmonique comme appartenant à une quadrique (paraboloïde imaginaire). Généralisant ensuite ⁽²⁾ la transformation qui lui avait réussi dans ce cas, il en a déduit *toutes* les surfaces dont l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2\left(u + \frac{v}{a} + e^{2av}\right) dv^2$$

convient à d'autres paraboloïdes, imaginaires aussi.

Tout ce qui constitue aujourd'hui la théorie des surfaces harmoniques, en dehors des travaux que nous venons d'énumérer, est contenu, à fort peu de chose près, dans nos *Recherches*. C'est ce qui résulte du rapport présenté à l'Académie des Sciences ⁽³⁾ sur le concours dont cette théorie a fait le sujet. Le mémoire couronné traite exclusivement des éléments linéaires doublement harmoniques, dont la détermination complète forme la seconde partie de mon travail. Un autre, qui a partagé avec le mien une mention honorable, ne contient, sauf quelques théorèmes communs aux trois mémoires approuvés, que les deux beaux résultats mentionnés ci-dessus, le second trouvé sans nul doute avant que M. Weingarten le publiât.

(A suivre.)

⁽¹⁾ *Göttinger Nachrichten*; 1887.

⁽²⁾ *Comptes rendus Acad. des Sciences*, t. CXII; 1891.

⁽³⁾ *Ibid.*, séance du 19 décembre 1892, t. CXV, p. 1122.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fleury : *Sur le calcul de l'infini.*

M. Burkhardt : *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension.*

M. Carvallo : *Sur la propriété fondamentale des surfaces minima.*

M. FERR communique la Note suivante :

Remarque sur le théorème de M. Moutard.

D'après le théorème de M. Moutard ⁽¹⁾, si l'on sait intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y) z,$$

on peut, en général, en déduire une suite illimitée d'équations nouvelles et de même forme dont on obtiendra l'intégrale au moyen de simples quadratures.

Employons, pour abréger, le symbole

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

et considérons deux équations consécutives de la suite

$$(2) \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_1, \quad \dots, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_i, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_{i+1}, \quad \dots$$

obtenue d'après le procédé connu. On a, par exemple,

$$\lambda_{i+1} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right),$$

ω_i étant une solution particulière de $\mathfrak{F}(z) = \lambda_i$.

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, §§ 390-392.

Nous nous proposons de voir si la suite (2) peut être limitée.
Il faut pour cela que l'on ait $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, d'où

$$(3) \quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = \mathfrak{F}(\omega_i).$$

De là résulte immédiatement que ω_i satisfait à la relation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \log \omega_i}{\partial x \partial y} = 0.$$

L'équation transformée sera donc identique à l'équation primitive si la solution particulière ω_i est le produit d'une fonction de x par une fonction de y .

On voit facilement que la suite (2) se réduit à l'équation primitive dans laquelle $\lambda(x, y)$ est de la forme $f(x)\varphi(y)$. Dans ce cas, l'équation (1) peut, comme on le sait, toujours être ramenée à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z.$$

Remarquons encore que, dans ce cas, la méthode de Laplace (1) transforme également cette équation en elle-même.

M. ZAREMBA adresse la Note suivante :

Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique.

Nous simplifierons le langage en convenant de dire qu'un système de périodes

$$(1) \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

d'une fonction $f(x)$ est un *système complet* si une période quelconque Ω de $f(x)$ est une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers des périodes (1). Cela posé, soit $f(x)$ une fonction pour laquelle le système (1) est un système complet de périodes. On sait que, si les quantités (1) vérifient p relations

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^k \omega_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p),$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II, en particulier § 332.

indépendantes, linéaires et homogènes et à coefficients entiers, il existe pour $f(x)$ des systèmes complets de périodes se composant chacun de $n - p$ périodes indépendantes. Je me propose de démontrer ce théorème par une méthode qui offre un certain intérêt en ce sens qu'elle fait connaître un procédé régulier pour calculer les systèmes complets de périodes dont l'existence forme l'objet du théorème. J'établirai dans ce but que, pour la fonction $f(x)$, on peut trouver un système complet

$$(3) \quad \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{n-1},$$

se composant de $n - 1$ périodes. En effet, envisageons l'une des relations (2), celle par exemple qui correspond à $k = 1$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a'_i \omega_i = 0,$$

et supposons d'abord que, parmi les nombres a'_i , il y en ait deux, a'_1 et a'_2 , qui soient premiers entre eux. On pourra déterminer deux entiers α et β tels que l'on ait

$$\alpha a'_1 + \beta a'_2 = 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement que l'on peut poser

$$\begin{aligned} \omega'_{i-1} &= \omega_i \quad (i = 3, 4, \dots, n), \\ \omega'_1 &= \beta \omega_1 - \alpha \omega_2. \end{aligned}$$

Admettons maintenant que, parmi les nombres a'_i , il n'y en ait pas deux qui soient premiers entre eux, et désignons par Δ le plus grand commun diviseur de a'_1 et a'_2 . On pourra alors trouver deux entiers α et β vérifiant l'équation

$$a'_1 \alpha + a'_2 \beta = \Delta,$$

et l'on s'assurera sans peine que le système

$$(4) \quad \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n,$$

défini par les équations

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \omega_i \quad (i = 3, 4, \dots, n), \\ \Omega_2 &= \frac{a'_1}{\Delta} \omega_1 + \frac{a'_2}{\Delta} \omega_2, \\ \Omega_1 &= \beta \omega_1 - \alpha \omega_2. \end{aligned}$$

est un système complet de périodes de la fonction $f(x)$. L'une des p relations, analogues aux équations (2), qui existent entre les périodes (4) sera la suivante :

$$\Delta\Omega_2 + \sum_{i=3}^{i=n} \alpha'_i \Omega_i = 0.$$

Si, parmi les nombres

$$\Delta, \alpha'_3, \alpha'_4, \dots, \alpha'_n,$$

il s'en trouve deux qui soient premiers entre eux, on déduira aisément du système (4) le système (3); il suffira d'appliquer ce qui a été dit dans le cas où α'_1 et α'_2 sont premiers entre eux. S'il n'en est pas ainsi, on déduira du système (4), par le procédé qui a servi à déduire celui-ci du système (1), un nouveau système complet de périodes

$$\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_n$$

de $f(x)$, tel que, parmi les p relations existant entre ces périodes, il y en ait une ne contenant ni Ω'_1 ni Ω'_2 .

Il résulte de là qu'en effectuant $n - 1$ opérations au plus, analogues à celle au moyen de laquelle on a obtenu le système (4), on parviendra à un système complet de périodes

$$\Omega''_1, \Omega''_2, \dots, \Omega''_n$$

de $f(x)$, d'où l'on pourra déduire un système tel que le système (3). D'ailleurs, comme rien n'empêche d'opérer sur le système (3) comme on l'a fait sur le système (1), il est évident que la fonction $f(x)$ admettra un système complet de périodes ne comprenant que $n - p$ périodes

$$(5) \quad \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-p}.$$

On s'assurera sans peine que les quantités (5) ne vérifient aucune relation linéaire et homogène et à coefficients entiers. On remarquera aussi qu'il résulte de notre méthode qu'il y a une infinité de systèmes tels que le système (5).

SÉANCE DU 18 AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Caronnet : *Sur les courbes que toutes leurs sécantes rencontrent en un troisième point.*

M. Raffy : *Sur l'intégration de certaines différentielles exactes qui dépendent de fonctions arbitraires.*

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Poincaré : *Sur la théorie des marées.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Balitrand adresse un Mémoire intitulé : *Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES FONCTIONS DE GREEN RELATIVES A UN DOMAINE D'UNE DIMENSION ;

Par M. H. BURKHARDT.

Dans la théorie du potentiel logarithmique, on appelle *fonction de Green* relative à un domaine donné de deux dimensions une fonction $G(x, y, \xi, \eta)$ qui satisfait à l'intérieur de ce domaine à l'équation différentielle

$$\Delta G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0,$$

qui y reste holomorphe, à l'exception du seul point (ξ, η) , où elle devient infinie comme $\log r$, r étant la distance de (x, y) à (ξ, η) , et qui s'annule sur le contour du domaine. Cette fonction une fois trouvée, l'intégrale double

$$u(x, y) = - \iint G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

étendue à tout le domaine donné, fournit la solution du problème

suivant : *Étant donnée une fonction arbitraire f , trouver une fonction u , continue dans tout le domaine, qui y satisfasse à l'équation $\Delta u = f$, et qui s'annule sur le contour.*

De même, dans la théorie du potentiel newtonien, on considère la fonction de Green relative à un espace de trois dimensions, qui a des propriétés analogues, $\log r$ étant remplacé par $\frac{1}{r}$; et si l'on voulait aborder la théorie de l'équation de Laplace à plus de trois variables indépendantes, il y aurait lieu de considérer des fonctions devenant nulles comme les puissances supérieures de $\frac{1}{r}$.

On peut se demander quel est le premier terme de cette suite. Existe-t-il quelque chose d'analogue pour des domaines d'une seule dimension, pour des équations du second ordre ordinaires? Il suffit de transformer un peu quelques résultats bien connus pour obtenir une réponse affirmative à cette question. L'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

se fait par deux quadratures superposées; on sait qu'on peut les remplacer par deux quadratures juxtaposées, moyennant une intégration par parties. La solution particulière qui s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$ peut être représentée par

$$u = - \int_a^x \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} f(\xi) d\xi - \int_x^b \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} f(\xi) d\xi.$$

Cette forme de l'intégrale est celle dont M. Picard se sert, tant dans ses cours à la Sorbonne que dans ses travaux (*Journal de Liouville*, 1890 et 1893). On peut confondre ces deux quadratures en une seule et écrire

$$u = - \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

si l'on convient de désigner par $G_1(x, \xi)$ une fonction de ξ ainsi définie :

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} \quad \text{pour } \xi < x.$$

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} \quad \text{pour } \xi > x.$$

Cette fonction peut être regardée comme la fonction de Green relative au segment de droite ab . Elle se trouve déterminée par les quatre propriétés caractéristiques suivantes :

- 1° Elle satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$.
- 2° Elle est finie et continue dans tout l'intervalle (a, b) , même pour $\xi = x$.
- 3° La dérivée première est continue elle aussi, sauf pour $x = \xi$, où elle possède deux valeurs distinctes, dont la différence est égale à -1 .
- 4° Elle s'annule aux deux limites de l'intervalle.

Une cinquième propriété, exprimée par la relation

$$G_1(x, \xi) = G_1(\xi, x)$$

et une sixième, qui consiste en ce que $G_1(x, \xi)$ est positive à l'intérieur de l'intervalle, sont des conséquences des quatre premières.

Dans la théorie du potentiel, on s'est occupé du cas où ce n'est pas la fonction u elle-même qui doit s'annuler sur le contour, mais bien une combinaison linéaire, à coefficients constants, de la fonction et de sa dérivée prise dans le sens de la normale extérieure. On l'écrit habituellement

$$hu + \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Pour les formules suivantes, il sera plus commode d'introduire au lieu de h sa valeur réciproque et d'écrire

$$u + \chi \frac{\partial u}{\partial n}.$$

De même on a, dans notre cas, le problème de déterminer la fonction u par les conditions

$$\begin{aligned} u - \gamma \frac{du}{dx} &= 0 & \text{pour } x = a, \\ u + \gamma \frac{du}{dx} &= 0 & \text{pour } x = b, \end{aligned}$$

la direction positive de l'axe des x entrant dans l'intervalle à

$x = a$ et en sortant à $x = b$. On obtient de ce problème une solution de la même forme que celle du problème spécial ($\gamma = 0$), si l'on introduit une fonction $G_3(x, \xi)$ ainsi définie

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \gamma - x)(\xi - a + \gamma)}{b - a + 2\gamma} \quad \text{pour } \xi < x;$$

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \gamma - \xi)(x - a + \gamma)}{b - a + 2\gamma} \quad \text{pour } \xi > x.$$

Elle a les mêmes propriétés que la fonction G_1 , à l'exception de la troisième, qui se trouve remplacée par

$$G - \gamma \frac{dG}{d\xi} = 0 \quad \text{pour } \xi = a,$$

$$G + \gamma \frac{dG}{d\xi} = 0 \quad \text{pour } \xi = b,$$

et de la sixième, qui n'a lieu que pour $\gamma > 0$. Or, c'est précisément cette dernière propriété qui a permis à M. Picard de mener à fin les démonstrations de convergence dans ses recherches sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u),$$

en supposant données les valeurs de u pour $x = a$, $x = b$. On voit qu'on pourra employer les mêmes méthodes dans le cas $\gamma > 0$, le plus important en vue des applications; mais on devra chercher d'autres détours si l'on veut aborder le cas $\gamma < 0$. Quand

$$\gamma < -(b - a),$$

la fonction G est même négative dans tout l'intervalle et pour toutes les valeurs du paramètre x ; alors les méthodes de M. Picard rentrent en vigueur de nouveau, seulement on doit échanger entre eux les résultats relatifs au cas de $f > 0$ et ceux qui correspondent à $f < 0$.

La fonction G_3 relative à l'intervalle (a, b) est égale à la fonction G_1 relative à l'intervalle $(a - \gamma, b + \gamma)$, théorème dont l'analogue n'est pas connu dans le cas de plusieurs variables indépendantes.

Deux cas particuliers échappent à cette analyse; ce sont

$$\chi = \infty \text{ (c'est-à-dire } h = 0) \quad \text{et} \quad \chi = -\frac{1}{2}(b-a);$$

il n'y a pas de fonction de Green, à un seul point singulier, dans ces deux cas. En effet, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et à la condition relative aux limites $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b f(x) dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité, contenues toutes dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi) d\xi + \lambda,$$

λ étant arbitraire.

De même, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et aux conditions relatives aux limites

$$\begin{aligned} u + \frac{b-a}{2} \frac{du}{dx} &= 0 & \text{pour } x = a, \\ u - \frac{b-a}{2} \frac{du}{dx} &= 0 & \text{pour } x = b, \end{aligned}$$

à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité contenues dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi) d\xi + \lambda \left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

**RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE SUR LA DÉTERMINATION D'UN TRIANGLE
AU MOYEN DES LONGUEURS DE SES BISSECTRICES;**

Par M. BARBARIN.

I. Déterminer un triangle où l'on donne l'angle A et les longueurs des bissectrices des angles B, C.

Soient $B - C = 4\theta$, $\omega = \frac{3\pi}{4} - \frac{3A}{4}$, $x = \tan \theta$, $y = \cos 2\theta$, $z = \tan \frac{\omega}{3}$, $d_a, d_b, d_c, d'_a, d'_b, d'_c$ les longueurs, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les inverses des longueurs des six bissectrices des angles A, B, C, les relations élémentaires entre les bissectrices et les angles conduisent aux équations du troisième degré de la forme générale

$$(1) \quad \frac{1 - x^2 + 2x \tan \frac{A}{2}}{1 - x^2 - 2x \tan \frac{A}{2}} - \frac{l_2}{l_1} \frac{P}{Q} = 0,$$

dans lesquelles l_1, l_2 sont les longueurs des bissectrices données, respectivement pour B et C, et P, Q des fonctions linéaires de x , dont les coefficients dépendent de la façon dont ces deux bissectrices sont associées, et des rapports d'inégalité entre A, B, C. L'équation (1) détermine x , et par conséquent les angles B, C, pourvu qu'elle ait une racine positive et inférieure à z . Il y a quatre combinaisons à faire, suivant que les bissectrices sont internes ou externes. Nous représentons par N le nombre des valeurs acceptables trouvées pour x dans chaque cas.

1^{re} Combinaison : $d_b = l_1, d_c = l_2$.

$$P = \tan \omega + x, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 1,$$

2^{re} Combinaison : $d'_b = l_1, d'_c = l_2$.

$$A \text{ n'est pas l'angle moyen } P = -\cot \omega - x, \quad Q = \cot \omega + x, \quad N = 1,$$

$$A \text{ est l'angle moyen } \dots P = -\cot \omega + x, \quad Q = \cot \omega + x, \quad N = 1, 2.$$

3^{re} Combinaison : $d'_b = l_1, d_c = l_2$, avec $B \leq C$.

$$A > C \dots \dots \dots P = -\tan \omega + x, \quad Q = 1 + x \tan \omega, \quad N = 0, 1, 2.$$

$$A < C \dots \dots \dots P = -\tan \omega - x, \quad Q = 1 + x \tan \omega, \quad N = 0, 1.$$

4^{re} Combinaison : $d_b = l_1, d'_c = l_2$, avec $B < C$.

$$A > B \dots \dots \dots P = 1 - x \tan \omega, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 0, 1, 2.$$

$$A < B \dots \dots \dots P = 1 + x \tan \omega, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 0, 1, 2.$$

Supposons les angles B, C connus par la résolution de l'une des équations (1). Pour achever la détermination du triangle, il faut mesurer la longueur l_3 de la bissectrice interne ou externe de A qui est concourante avec les bissectrices données de longueur l_1, l_2 . Pour fixer les idées, soient $d_b = l_1, d_c = l_2$, nous chercherons $d_a = l_3$ en calculant $\frac{1}{d_a} = \alpha$. Si l'on pose

$$n^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \quad p^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2},$$

on peut tirer α de l'une des équations

$$(2) \quad \begin{cases} 2y^3 - 2(\cos 2\omega + 2n^2 \sin^2 A)y^2 \\ \quad - (1 - \cos A)y + (1 - \cos A) \cos 2\omega = 0, \\ 2y^3 \sin \frac{A}{2} + 2(\cos A - p^2 \sin^2 A)y^2 \\ \quad - \left[2 \sin \frac{A}{2} + \cos 2\omega(1 + \cos A) \right] y + 1 - \cos A = 0, \end{cases}$$

où y a été calculé d'après l'équation (1). Mais il est intéressant d'avoir une équation donnant α indépendamment de θ . Pour cela, il n'y a qu'à éliminer y entre les équations (2), et si l'on fait, pour abréger,

$$u = 1 + z^2, \quad v = 1 - z^2, \quad t = u^2 - 16z^2,$$

puis

$$\begin{aligned} X_1 &= 4u^2 + t, & X'_1 &= u^2 + t, & X_2 &= u(2u^2 + t), & X_3 &= 4u^3 - t^2, \\ Y_1 &= up^2 - 2vn^2, & Y_3 &= 2u^3n^2 - vtp^2, \end{aligned}$$

l'équation résultante a la forme

$$(3) \quad \begin{cases} [u^3X_2^2 - X_1(X_3 + 4v^2Y_1)]^2 \\ \quad - u[u^3X_1X'_2 + 2(Y_3 + 4v^2Y_1)(u^2t + 2vY_3)] \\ \quad \quad \times [X_1X'_2 + 2X_2(u^2t + 2vY_3)] = 0, \end{cases}$$

et la racine commune aux équations (2) est

$$(4) \quad y = \frac{v[X_1X'_2 + 2X_2(u^2t + 2vY_3)]}{u^3X_2^2 - X_1(X_3 - 4v^2Y_1)}.$$

L'équation (3) est de degré pair et du troisième degré en $\frac{1}{z^2} = d_a^2$. Le coefficient de son terme en $\frac{1}{z^6}$ est négatif ou nul; donc elle a une racine positive qui peut aussi se calculer en fonction des données et de θ par l'une des équations (2) ou (4).

Donc il existe entre l'angle A et les longueurs des trois bissectrices concourantes internes une relation du troisième degré par rapport à ces longueurs, et qui, résolue en fonction de la bissectrice de l'angle A, admet une solution unique.

Quand on aura ainsi déterminé α , les côtés du triangle s'obtiendront par les équations linéaires .

$$2\alpha \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad 2\beta \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad 2\gamma \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Les autres combinaisons de bissectrices donneront lieu à des calculs de même nature, et l'on est ainsi conduit à cette proposition générale :

Entre l'angle A et les longueurs de trois bissectrices concourantes du triangle ABC, il existe une relation de la forme (3), qui est du troisième degré par rapport à la bissectrice de l'angle A et admet pour cette dernière autant de solutions que l'équation (1) correspondante a de racines positives et moindres que z.

Considérons encore la combinaison $d_b = l_1$, $d_c = l_2$; on a

$$\frac{d'a}{da} = \frac{z}{a'} = \cot 2\theta;$$

donc si l'on fait

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'^2} = N^2, \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha'^2} = P^2,$$

$$Y_1 = uP^2 - 2vN^2, \quad Y_3 = -2u^3N^2 - vtP^2, \quad Y_4 = 2(u^3 + 4z^2t)N^2 - vu^3P^2,$$

il existe, entre les longueurs des trois bissectrices non concourantes telles que d_b , d_c , d'_a et l'angle A, une relation de la forme

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & [vu^3(X_2 - 4uY_1)^2 - (X_3 - 4v^2Y_1)(vX_4 + 4uY_4)]^2 \\ & - u[2(X_3 - 4v^2Y_1)(vu^2t + 8z^2Y'_3) + vu^3X'_2(X_2 - 4uY_1)] \\ & \times [2(X_2 - 4uY_1)(vu^2t + 8z^2Y'_3) + X'_2(vX_4 + 4uY_4)] = 0, \end{aligned} \right.$$

du quatrième degré en d'_a et admettant pour cette ligne autant de valeurs que l'équation (1) correspondante a de racines admissibles.

II. *Déterminer un triangle où l'on donne les longueurs de trois bissectrices des angles A, B, C.*

1° Les longueurs données se rapportent à trois bissectrices concourantes.

Les relations de la forme (3) se réduisent à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2 ou de $l_1 l_2$; il suffit donc d'envisager l'équation (3) elle-même, qui présente de curieuses propriétés. Comme les indices des polynômes X et Y y représentent leurs degrés en $z^2 = Z$, on voit qu'elle est du quatorzième degré. En la développant par rapport à v , elle admet la racine double $v^2 = 0$, et, par suite, son degré s'abaisse à douze.

De plus, si l'on y change Z en $\frac{1}{Z} = Z'$ et si l'on pose $1 - Z' = v'$, la propriété des polynômes u et X, d'être tous réciproques, fait que l'équation (3) se transforme précisément en cette même équation où le coefficient de n^2 a seul changé de signe. Par suite, *dans l'équation du douzième degré, les coefficients extrêmes ou équidistants des extrêmes sont égaux au signe près de n^2 .*

En particulier,

$$A_0 = 320(p^2 + 2n^2)^2(1 - p^2 - 2n^2), \quad A_{12} = 320(p^2 - 2n^2)^2(1 - p^2 + 2n^2)$$

et, si les longueurs données l_1, l_2, l_3 satisfont à l'une des relations

$$\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 = 0,$$

le degré s'abaisse encore d'une unité par la suppression d'une racine nulle ou infinie.

• L'équation (3) résolue fait connaître z et A, et le problème proposé est ramené au précédent. Toutefois, z doit être positif et moindre que 1, et les longueurs données doivent permettre que la valeur correspondante de y tirée de l'équation (4) soit positive et inférieure à 1.

2° Les longueurs données sont celles de trois bissectrices non concourantes.

Les relations de la forme (5) se réduisent encore à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2 . L'équation (5) a absolument les mêmes propriétés que l'équa-

tion (3). Le degré seul diffère; il vaut 16 en général, sauf les simplifications particulières.

Pour ne citer qu'un seul cas particulier de la théorie générale, prenons le plus intéressant, celui où $l_1 = l_2$; il conduit à la proposition suivante, qui mérite d'être signalée :

Tout triangle qui a deux bissectrices égales est isoscèle si ces bissectrices sont ensemble internes ou externes, à condition que, dans ce dernier cas, l'une d'elles appartienne à l'angle moyen. Mais si elles sont de nature différente, ou si, étant externes, aucune d'elles n'appartient à l'angle moyen, le triangle n'est pas nécessairement isoscèle, excepté toutefois quand le troisième angle vaut 120° ou 60° .

III. Construction graphique des racines des équations (1) et (3).

En faisant $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} = m$, l'équation (1) se trouve résolue par l'intersection des deux hyperboles

$$1 - x^2 = 2 \operatorname{tang} \frac{A}{z} x \tau_1,$$

$$x(mx - \tau_1) + \operatorname{tang} \omega (x - m \tau_1) = 0.$$

En faisant $\sin \frac{A}{z} = \lambda = \frac{v}{u}$, et prenant, par exemple, $n^2 = \frac{1}{2}$, $p = 2$, l'équation (3) se trouve résolue par l'intersection des courbes

$$Y = \frac{(4\lambda^2 + 1)(4\lambda^2 - 2) + 2(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)(-8\lambda^3 + 16\lambda^2 + 2\lambda - 3)}{(4\lambda^2 + 1)^2 - (4\lambda^2 - 1)(5 - 4\lambda^2)(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)},$$

$$Y = \frac{(4\lambda^2 + 1)^2 - (4\lambda^2 - 1)(5 - 4\lambda^2)(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)}{(4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 2)(5 - 4\lambda^2) + 2(4\lambda^2 + 1)(-8\lambda^3 + 16\lambda^2 + 2\lambda - 3)},$$

la première du huitième degré, la seconde du septième, qui sont tangentes au point $\lambda = 0$, $Y = -1$ avec la droite $Y + 1 - \lambda = 0$ pour tangente commune, et ont deux points d'intersection distincts dans le voisinage de la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi, quand on donne les longueurs des trois bissectrices internes, deux valeurs de z seules peuvent convenir, et à chacune ne répond qu'un seul triangle. Il y a, par conséquent, deux solutions et pas davantage. Les autres cas se traiteront semblablement.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 MAI 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. Cahen et M. Andrade, présentés par MM. D. André et Picquet.

Communications :

M. Bioche : *Sur des surfaces remarquables du troisième degré.*

M. Painlevé : *Sur les trajectoires d'un système matériel.*

M. Humbert : *Sur les complexes de coniques.*

M. Kœnigs : *Sur les aires engendrées à l'aide de roulettes.*

M. d'Ocagne : *Sur un abaque relatif à l'équation de Képler.*

M. Fouret : *Sur une surface du quatrième degré à droite double.*

M. L. LECORNU fait la Communication suivante ⁽¹⁾ :

Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique.

Dans une Communication faite le 7 février dernier à la Société mathématique, M. Kœnigs a examiné le mouvement d'un point dans un plan, en supposant ce point attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube de la distance. Il a trouvé que, dans certains cas, le temps ne peut croître au delà d'une limite déterminée, et il a expliqué ce paradoxe en remarquant que la continuation du mouvement devient impossible parce que la vitesse et l'accélération acquièrent des valeurs infinies.

Je suis loin de vouloir contester cette conclusion; toutefois, il peut être bon de regarder les choses de plus près. Quand l'expression analytique d'une accélération passe par l'infini, il est toujours possible, en modifiant un peu les données, de faire en sorte que

(1) Annexe au compte rendu de la séance du 21 février.

cette expression devienne simplement *très grande*. On obtient alors un mouvement bien déterminé, et il est naturel de chercher comment se transforme ce mouvement quand on revient graduellement aux données initiales. Peu importe que les forces infinies n'existent pas dans la nature : la Mécanique rationnelle, il ne faut pas l'oublier, est une science purement abstraite, dont les hypothèses n'ont souvent qu'un rapport fort éloigné avec les phénomènes naturels.

Mais, pour que le passage à la limite eût un sens, il faudrait que le résultat final restât le même, quelle que fût la marche suivie, et nous allons voir que cette condition essentielle n'est pas remplie. Prenons d'abord un exemple tout à fait élémentaire. Dans son *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle*, M. de Saint-Germain a traité le cas du mouvement rectiligne d'un point M attiré par une force inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe A. Si le point A est situé sur la droite parcourue par M, l'intégrale à laquelle on parvient assigne au temps une limite supérieure. M. de Saint-Germain propose alors de regarder le mouvement dont il s'agit comme la limite de celui qu'on obtient quand le point attiré est assujéti à décrire une ligne droite ne contenant pas le point attirant, mais aussi voisine qu'on le voudra de ce dernier. Il est clair que le mouvement serait alors périodique et s'effectuerait symétriquement de part et d'autre de la projection du point attirant sur la droite. On est ainsi conduit à admettre que, dans le cas où le point attirant A appartient à la droite, le point mobile M oscille de part et d'autre de A, en prenant une vitesse infinie chaque fois qu'il coïncide avec A : analytiquement cette solution revient à changer la constante d'intégration à chaque passage.

Les mêmes considérations sont applicables au cas de l'attraction newtonienne. Mais le résultat auquel on parvient alors est en contradiction complète avec la note que la rédaction du *Bulletin* de la Société a jointe à l'article de M. Gascheau, publié en 1882 dans ce recueil; comme l'a rappelé M. Königs, cette note suppose que le mobile, en arrivant au centre d'attraction, va se réfléchir comme à la rencontre d'une bande élastique; et il est facile de voir pourquoi la rédaction conclut de cette manière. Si le mobile, au lieu de partir sans vitesse initiale ou avec une

vitesse dirigée vers le point attirant, était animé originairement d'une très petite vitesse perpendiculaire au rayon vecteur, il décrirait une ellipse très aplatie, ayant pour grand axe la direction de ce rayon vecteur, et reviendrait à son point de départ après avoir contourné de très près le centre d'attraction. En faisant tendre la vitesse initiale vers zéro, on parviendrait au genre de mouvement qu'indique la note.

Une pareille divergence n'a rien d'étonnant : elle prouve uniquement que la nature du mouvement limite dépend de la manière dont on procède pour substituer tout d'abord une force très grande à la force infinie.

Pour en revenir au problème de M. Kœnigs, on aperçoit également diverses manières d'éviter le passage des forces attirantes par l'infini.

On peut supposer, par exemple :

Ou bien que le mobile est assujéti à rester dans un plan parallèle à celui des droites attirantes, et aussi voisin qu'on le voudra de ce dernier ;

Ou bien que l'action de l'axe Oy est exprimée par $-\frac{A}{x^3} + \frac{\alpha}{x^4}$, α désignant une très petite constante positive, et que de même l'action de l'axe Ox a pour valeur $-\frac{B}{y^3} + \frac{\beta}{y^4}$.

Dans le premier cas, rien n'empêcherait le point attiré de se mouvoir dans toute l'étendue de son plan, et il traverserait avec une très grande vitesse la projection sur ce plan de chacune des droites attirantes. Dans le second cas, au moment où le mobile arriverait à la distance $\frac{\alpha}{A}$ de l'axe des y , l'attraction correspondante se changerait en une répulsion susceptible, pour des distances plus petites, de croître au delà de toute limite ; la même chose aurait lieu à la distance $\frac{\beta}{B}$ de l'axe des x : le point resterait indéfiniment confiné dans le même quadrant.

On pourrait encore imaginer d'autres combinaisons : citons seulement la substitution des formules d'attraction

$$-\frac{A}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{(y^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

à la place de $-\frac{A}{x^3}$ et $-\frac{B}{y^3}$. Avec ces formules, le mobile traverse sans difficulté les droites attirantes; mais, si l'on ne veut pas que l'attraction se change en répulsion, il faut considérer chaque droite comme étant une ligne de discontinuité pour la force correspondante, qui passe brusquement de $-\frac{A}{a^3}$ à $+\frac{A}{a^3}$ ou de $-\frac{B}{b^3}$ à $+\frac{B}{b^3}$.

Remarquons qu'à distance finie des droites attirantes, toutes ces hypothèses conduisent à des mouvements aussi peu différents qu'on le voudra de celui qui a été envisagé par M. Kænigs : c'est seulement en approchant de l'une des droites que les divergences deviennent notables.

Il serait intéressant d'étudier complètement les trajectoires ainsi obtenues; mais, en le faisant ici, j'allongerais démesurément cette Note, et je m'écarterais de l'objet que je me suis proposé.

SÉANCE DU 16 MAI 1894.

PRÉSIDENCE DE M. DE COMBEROUSSE.

Communications :

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Fleury : *Sur certains faux principes et sur la règle de l'Hospital.*

M. Painlevé : *Identité de deux déterminants, suggérée par le principe de la moindre action.*

M. Lancelin : *Mouvement du pendule de longueur uniformément variable.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ)

(Suite et fin) :

Par M. L. RAFFY.

Nous ne nous occupons dans ces *Recherches* que de déterminer des éléments linéaires jouissant de certaines propriétés assi-

gnées à l'avance. Ainsi nous trouvons, entre autres, tous ceux qui conviennent à des surfaces harmoniques en même temps qu'à des surfaces réglées ou à des spirales, et tous ceux qui sont doublement harmoniques. Il y aurait intérêt assurément à connaître les surfaces qui correspondent à ces éléments linéaires. Mais de pareils problèmes sont, en général, comme Ossian Bonnet l'a dit, au-dessus des forces de l'analyse actuelle. Plus d'un, d'ailleurs, parmi ceux que nous résolvons, présentait déjà des difficultés considérables, qu'on pourra mesurer aux ressources mises en œuvre pour les surmonter. Nous allons passer en revue les trois Parties de notre travail.

Première Partie ⁽¹⁾. — Nous commençons (Chap. I) par rappeler le théorème fondamental de M. Massieu et nous le mettons sous une forme particulière qui permet d'en faire deux applications importantes :

Pour qu'un élément linéaire donné

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions A et W de la seule variable v, satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial v} &= G \left(W + A' \int \frac{du}{G} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} - 3A \right) \right] &= \frac{2}{G \sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{G} \left(W + A' \int \frac{du}{G} \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme première conséquence nous en déduisons (Chap. II) que toute surface harmonique à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution ⁽²⁾. Ce théorème permet de classer (deuxième Partie) les éléments linéaires harmoniques et intervient aussi (troisième partie) dans la recherche de ceux qui conviennent à des spirales.

⁽¹⁾ Publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1894.

⁽²⁾ L. RAFFY, *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 424; 1891).

La seconde application (Chap. III) est la détermination complète des surfaces réglées harmoniques. Écartant celles de ces surfaces qui résultent de la déformation de la sphère, nous prouvons que *toutes les autres sont applicables sur des surfaces du second degré, réelles ou imaginaires, à moins qu'elles ne soient applicables sur des surfaces de révolution* ⁽¹⁾. Ce théorème les définit suffisamment, puisque l'on connaît toutes les déformations dans lesquelles les génératrices des surfaces réglées restent rectilignes. Au cours de la démonstration, nous donnons, sans les établir, des formules qui paraissent indispensables à l'étude des quadriques considérées comme surfaces réglées.

Le Chapitre IV est consacré aux intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques, telle que l'a présentée M. Darboux ⁽²⁾. Nous montrons d'abord que l'intégrale linéaire n'existe que pour les surfaces de révolution : c'est la réciproque d'une proposition de M. Darboux et la généralisation du premier théorème de M. Massieu. Nous étendons ensuite le second théorème de M. Massieu en prouvant que, s'il existe une intégrale quadratique, la surface est généralement harmonique; mais nous avons bien soin de discuter un cas particulier qui conduit à certaines surfaces représentables géodésiquement sur d'autres surfaces avec conservation d'une seule famille de lignes de longueur nulle. Il va sans dire que l'intégrale quadratique n'existe pas pour toutes les surfaces harmoniques. Nous formons l'équation fonctionnelle dont dépendent les éléments linéaires à intégrale quadratique et nous en indiquons diverses solutions.

Deuxième Partie ⁽³⁾. — La deuxième Partie a pour objet la *détermination des éléments linéaires doublement harmoniques*. Il s'agit de trouver *toutes* les fonctions $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ qui vérifient, conjointement avec deux autres fonc-

(1) L. RAPPY, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, Livre VI, Chap. VII.

(3) Publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, tome X; 1894.

tions inconnues $X(x)$ et $Y(y)$, l'équation différentielle indéterminée

$$(E) \quad \begin{cases} (X'' + Y'')(\varphi - f) - 3(X' - Y')\varphi' \\ - 3(X' + Y')f' + 2(X - Y)(\varphi'' - f'') = 0. \end{cases}$$

Pour en faciliter la résolution, nous commençons (Chap. I) par classer les éléments linéaires harmoniques en appliquant, avec des simplifications appropriées, la méthode des différentiations réitérées, dont Abel a donné le principe. Cette analyse conduit à distinguer successivement les développables, puis les surfaces à courbure totale constante, puis les surfaces de révolution doublement harmoniques. Elle montre que, *si un élément linéaire donné sous la forme harmonique $(\varphi - f) dx dy$ n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces, la différence $X - Y$ est déterminée à un facteur constant près*, ses deux dérivées logarithmiques pouvant être tirées de l'équation précédente. On arrive ainsi aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel élément linéaire soit doublement harmonique.

Le Chapitre se termine par l'exposé de deux lois intuitives ⁽¹⁾ qui, bien qu'essentiellement distinctes, concourent à faire connaître des exemples nouveaux d'éléments linéaires doublement harmoniques; l'une est la *loi de passage*, l'autre la *loi de réciprocité*. La première détermine, dans tous les cas qui exigent des intégrations, l'ensemble des solutions X et Y qu'admet l'équation (E) quand les fonctions φ et f sont données. La seconde, qui permet, connaissant un système de solutions X , Y , φ et f de cette équation, d'en écrire un autre sans calcul, fournit alors de nouvelles solutions à l'aide des précédentes.

C'est pourquoi nous effectuons au Chapitre II la recherche de toutes les solutions de l'équation (E) quand $(\varphi - f) dx dy$ est l'élément linéaire d'une développable ou d'une surface à courbure constante.

Pour la même raison, je résume au Chapitre III les calculs par lesquels j'avais déterminé ⁽²⁾, ne connaissant pas la solution en-

⁽¹⁾ L. RAFFY, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 609; 1889).

⁽²⁾ L. RAFFY, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus*

core inédite de M. Darboux, les éléments linéaires des surfaces de révolution doublement harmoniques. J'établis en passant que *deux pareilles surfaces, choisies d'une manière quelconque, peuvent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre*, et je donne toutes les solutions correspondantes de l'équation (E).

Avec le Chapitre IV nous abordons la recherche générale des éléments linéaires doublement harmoniques. Après les avoir classés d'après le nombre de leurs intégrales quadratiques, nous rappelons celui que M. Darboux a découvert,

$$ds^2 = \left[\frac{P}{(\xi + \tau_1)^2} + \frac{Q}{(\xi - \tau_1)^2} + \frac{P_1}{(1 + \xi \tau_1)^2} + \frac{Q_1}{(1 - \xi \tau_1)^2} \right] d\xi d\tau_1,$$

et qui a déjà été mentionné précédemment. Nous montrons comment il devait nécessairement s'offrir dès qu'on appliquait ⁽¹⁾ les deux lois de passage et de réciprocité à l'élément linéaire $(x + y)^{-2} dx dy$ des surfaces à courbure constante et nous réunissons dans un tableau les dix solutions nouvelles auxquelles conduit cette application (les surfaces de révolution doublement harmoniques n'en fournissent pas). A ce moment, nous nous trouvons connaître, comme éléments doublement harmoniques : 1° ceux des surfaces développables (six formes); 2° ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes); 3° ceux des surfaces de révolution doublement harmoniques (seize formes); 4° les éléments linéaires réciproques de ceux des développables (cinq formes); 5° les éléments linéaires réciproques de ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes).

Le reste du Chapitre est employé à démontrer qu'il n'en existe point d'autres, ainsi que je l'avais depuis longtemps pressenti ⁽²⁾. A cet effet, je commence par établir que *toutes les fonctions X, Y, τ , f qui satisfont à l'équation (E) sont des fonctions uniformes*, propriété importante, dont j'expose deux démonstrations,

des séances de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 493; 1889). — Sur un problème de la théorie des surfaces (Bulletin des Sciences mathématiques, t. XIII, p. 161; 1889).

⁽¹⁾ L. RAFFY, Sur les éléments linéaires doublement harmoniques (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CIN, p. 609; 1889).

⁽²⁾ Même Communication.

la première fondée sur les résultats précédemment acquis, la seconde directe. Toutes deux procèdent de cette remarque qu'il n'y a qu'à prouver l'uniformité de l'une des quatre fonctions X , Y , φ et f .

Toutes les solutions de l'équation (E), dans le cas des développables, des surfaces à courbure constante et des surfaces de révolution doublement harmoniques sont uniformes; il suffit donc de montrer qu'il en est encore de même quand l'élément linéaire $(\varphi - f) dx dy$ n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces. C'est là l'objet du premier raisonnement : supposant que les fonctions considérées et leurs dérivées des deux premiers ordres n'ont aucune ligne de discontinuité, je montre en quelques lignes que, si X ou Y n'était pas uniforme, les dérivées logarithmiques de $X - Y$ dépendraient d'au moins une constante arbitraire, contrairement au théorème du Chapitre I.

La seconde démonstration (1) repose sur la propriété de l'équation (E) de pouvoir être intégrée deux fois, de manière à fournir Y , par exemple, au moyen de quadratures, quand les autres fonctions sont considérées comme connues. On trouve ainsi

$$(\varphi - f)^2 Y = X(\varphi - f)^2 + 3X' \int \varphi^2(t) dt + 3X' \int f^2(z) dz \\ + \frac{X''}{2} (\Phi + F)^2 + \xi(x)(\Phi + F) + \xi_1(x),$$

en posant

$$t = x + y, \quad \Phi(t) = \int \varphi(t) dt, \\ z = x - y, \quad F(z) = \int f(z) dz,$$

et désignant par ξ et ξ_1 deux fonctions de x introduites comme constantes d'intégration. Cette expression de Y contient x en apparence, mais en est indépendante. Pour établir qu'elle est fonction uniforme de y , j'emploie un mode de raisonnement nouveau, je crois, dans la théorie des fonctions et appelé à bien d'autres usages. Assignant à y une valeur fixe b et faisant décrire à la variable x dans son plan tous les chemins fermés qui ont pour origine et pour extrémité un point quelconque $x = a$, je montre que tous ces

(1) Cette démonstration, inachevée dans le texte primitif, est l'une des deux que le rapport de l'Académie vise comme insuffisantes.

chemins ramènent finalement la valeur initiale de Y , les diverses fonctions qui interviennent dans le problème étant supposées n'avoir que des points singuliers isolés. Ensuite, grâce à la forme linéaire des arguments $x + y$ et $x - y$ par rapport aux variables indépendantes x et y , je fais voir qu'à tout chemin décrit *par la variable y* dans son plan, partant de b pour y revenir, on peut substituer un chemin convenable décrit par la variable x dans son plan, du point a au point a , tandis que y garde constamment la valeur b . Ainsi se trouve complètement démontrée l'uniformité de la fonction Y et, par suite, de toutes les solutions de l'équation (E).

Ce résultat une fois acquis, je mets en évidence les théorèmes suivants :

I. *Les quatre fonctions X, Y, φ, f ne présentent à distance finie d'autres singularités que des pôles doubles à résidu nul.*

II. *Si l'une d'elles admet plus d'un pôle à distance finie, les quatre fonctions sont périodiques; si l'une d'elles admet trois pôles formant un triangle, toutes les quatre sont doublement périodiques; si l'une d'elles n'a qu'un seul pôle à distance finie, les autres n'en ont pas davantage.*

III. *Si l'une d'elles est doublement périodique, l'élément linéaire rentre dans le type de M. Darboux.*

Pour achever la solution, je résous ce problème beaucoup plus général :

Trouver toutes les fonctions $X(x)$ qui sont uniformes et qui deviennent des fonctions uniformes de ξ par le changement de variable

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}.$$

On voit, en effet, immédiatement que les fonctions X qui vérifient l'équation (E) jouissent de cette double propriété.

En faisant décrire aux variables x et ξ les contours qui conduisent aux différentes déterminations des intégrales inverses

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \quad x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{X(\xi)}},$$

on s'assure que X et Ξ sont des fonctions périodiques de leurs arguments. Même après cette première réduction le problème nouveau semble loin d'être résolu, plus encore à cause de la nature en apparence si indéterminée des fonctions X et Ξ que de la multiplicité des cas particuliers correspondant aux hypothèses possibles sur le nombre de leurs périodes effectives (deux, un ou zéro). Mais, par un raisonnement fondé sur la considération des périodes des intégrales ξ et x , et qui convient à tous les cas, je montre qu'il existe une relation homographique à coefficients constants entre l'une des fonctions $p(\xi)$, $\sin^2 \xi$, e^ξ , ξ^2 ou ξ d'une part et l'une des fonctions $p(x)$, $\sin^2 x$, e^x , x^2 ou x d'autre part ⁽¹⁾. Cette relation détermine dans chaque cas les fonctions $X(x)$ et $\Xi(\xi)$. En lui donnant toutes les formes dont elle est susceptible, on retrouve naturellement toutes les expressions de X obtenues dans les Chapitres II et III ainsi que dans le présent, mais on n'en trouve aucune nouvelle.'

Nous connaissons alors les formes analytiques, parfaitement déterminées, que peut revêtir X ; ce sont certaines fonctions rationnelles, soit de $p(x)$, soit de e^x , soit de x lui-même, comportant au plus huit constantes arbitraires; ce sont aussi les formes possibles de Y et, d'après la loi de réciprocité, les fonctions φ et f n'en ont pas d'autres. La détermination complète de tous les éléments linéaires doublement harmoniques est ainsi ramenée à une pure question de calcul algébrique : substituer dans l'équation (E) les diverses expressions connues de X , Y , φ , f et déterminer les constantes arbitraires de façon que cette équation soit vérifiée quels que soient x et y . Les résultats précédemment acquis (en particulier les théorèmes I, II et III) et quelques considérations simples de périodicité réduisent considérablement le nombre des essais, et l'on établit en toute rigueur la proposition énoncée au début du Chapitre. Ainsi se trouve complètement résolu le problème des éléments linéaires doublement harmoniques.

Le Chapitre V traite des surfaces que M. Lie, dans son Mé-

⁽¹⁾ Nous négligeons les indéterminées qui pourraient multiplier les deux variables ou s'ajouter à elles. — Cette proposition n'était pas établie rigoureusement dans le texte primitif.

moire déjà cité, a appelées *surfaces de troisième classe*. Nous montrons que ces surfaces sont comprises parmi les surfaces doublement harmoniques, sauf une catégorie assez restreinte, qui peut n'y pas rentrer. La détermination de leurs éléments linéaires est implicitement contenue dans le Chapitre précédent, puisqu'il suffit de particulariser les constantes restées arbitraires dans nos formules pour satisfaire à l'équation du problème, que M. Lie a donnée sans la résoudre.

La *troisième classe* étant loin de comprendre tous les éléments linéaires doublement harmoniques, M. Lie a rencontré parfois de tels éléments linéaires, qu'il particularise aussitôt, pour les faire rentrer dans la troisième classe, mais sans mentionner leur propriété d'être doublement harmoniques. Il nous a suffi de la mettre en évidence sur trois d'entre eux pour arriver à cet énoncé, qui complète la théorie de la représentation géodésique : *Toute surface susceptible d'être représentée sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des deux familles de lignes de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

Troisième Partie ⁽¹⁾. — L'objet de cette dernière Partie est la *détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des spirales.*

Au début du Chapitre I, j'indique les premières solutions du problème, fournies par le théorème de M. Maurice Lévy : *Tout élément linéaire homogène, de degré autre que — 2, appartient à une infinité de spirales.* Tel est le cas de celui-ci

$$(m) \quad ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

qui est visiblement harmonique. En faisant croître ou décroître m indéfiniment, on en déduit ces deux autres

$$(e) \quad ds^2 = (e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2),$$

$$(l) \quad ds^2 = (\log au - \log bv)(du^2 + dv^2),$$

qui conviennent également à des spirales. Ces solutions une fois

⁽¹⁾ Publiée dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1895.

signalées, nous posons le problème dans toute sa généralité. Il s'agit de résoudre complètement, dans le cas des spirales, l'équation différentielle indéterminée

$$2X(\omega_x'^2 + \omega_y'^2) - 2Y(\omega_x''^2 + \omega_y''^2) + 3X'\omega_x' - 3Y'\omega_y' + X'' - Y'' = 0,$$

qui exprime que l'élément linéaire $e^\omega dx dy$ acquiert la forme harmonique par le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \quad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}.$$

Comme on a, pour les spirales,

$$\omega = -i(x - y) + \int T(t) dt, \quad t = x + y,$$

il vient

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} 2X(T' + T^2 - 2iT - 1) - 2Y(T' + T^2 + 2iT - 1) \\ + 3X'(T - i) - 3Y'(T + i) + X'' - Y'' = 0. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation qui nous a permis ⁽¹⁾ de déterminer tous les éléments linéaires cherchés et, en outre, de distinguer ceux qui sont doublement harmoniques de ceux qui ne le sont point.

Avant d'en commencer la discussion, je fais voir que *pour les spirales simplement harmoniques les fonctions X et Y sont nécessairement de la forme*

$$X = A e^{2rx}, \quad Y = B e^{-2ry},$$

A, B et r étant trois constantes dont la dernière peut être nulle. C'est pourquoi nous résolvons l'équation (S), d'abord en réduisant X et Y à des constantes, ce qui conduit à l'élément linéaire (e), puis en prenant pour X et Y les exponentielles; il faut alors intégrer une équation de Riccati; mais il est possible d'en trouver une solution et l'on arrive ainsi aux deux éléments linéaires (m) et (l).

Le Chapitre finit par la détermination ⁽²⁾ des éléments linéaires

⁽¹⁾ L. RAFFY, *Sur les spirales harmoniques* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXII, p. 518; 1891).

⁽²⁾ L. RAFFY, *Sur la déformation des surfaces spirales* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIX, p. 65; 1891).

qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution. Ils rentrent tous dans le type

$$ds^2 = (x - y)^m dx dy.$$

trouvé par M. Lie pour l'élément linéaire des surfaces dont les géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes.

Au Chapitre II je traite complètement l'équation (S). En effectuant sur elle les transformations générales étudiées tout au début de la seconde Partie, on est conduit à distinguer d'abord les spirales à courbure constante, qui sont forcément des développables, puis les spirales applicables sur les surfaces de révolution; il n'y a lieu de revenir ni sur les unes ni sur les autres. Ces deux cas particuliers une fois écartés, l'équation (S) permet d'exprimer X' et Y' en fonction linéaire de X et Y , et comme ses coefficients ne dépendent que de T et T' , on a

$$X' = T_1 X - T_2 Y, \quad Y' = T_2 X - T_1 Y,$$

les lettres T_i désignant des fonctions rationnelles de T et de ses quatre premières dérivées. De ces expressions on pourrait déduire X'' et Y'' qui seraient linéaires et homogènes en X et Y . Substituant X' , Y' , X'' et Y'' dans l'équation (S), on trouverait un résultat de la forme

$$X f_1(t) - Y f_2(t) = 0;$$

en sorte que, si le rapport $Y : X$ n'était pas une fonction de t , c'est-à-dire si l'on ne faisait pas

$$X = A e^{cx}, \quad Y = B e^{-cx},$$

hypothèse étudiée précédemment, on devrait poser

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 0.$$

Ce seraient là deux équations différentielles du cinquième ordre pour la fonction T , réductibles, il est vrai, au quatrième, puisque la variable indépendante n'y figurerait pas. Mais telle serait la complication de ces équations que, loin de pouvoir les discuter, on serait presque dans l'impossibilité de les écrire explicitement. C'est pourquoi je procède d'une tout autre façon. Laissant provisoirement de côté la recherche de la fonction T ,

je considère les fonctions T_i comme des fonctions inconnues, sans relation entre elles, et je démontre que le système (τ) admet deux solutions et deux seulement, savoir :

$$(I) \quad \begin{cases} X = (A\alpha + \alpha)e^{cx}, & Y = (B\gamma + \beta)e^{-cy}, \\ T_1 = \frac{AB}{ABt + A\beta + B\alpha} + c, & T_2 = \frac{B^2e^{-ct}}{ABt + A\beta + B\alpha}, \\ T_3 = \frac{A^2e^{ct}}{ABt + A\beta + B\alpha}, & T_4 = \frac{AB}{ABt + A\beta + B\alpha} - c; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} X = le^{2rx} + Ae^{2hx}, & Y = me^{-2ry} + Be^{-2hy}, \\ \Delta T_1 = 2B l r e^{(r-h)t} - 2A m h e^{-(r-h)t}, & \Delta T_3 = -2B m (r-h) e^{-(r+h)t}, \\ \Delta T_2 = -2A l (r-h) e^{(r+h)t}, & \Delta T_4 = -2B l h e^{(r-h)t} + 2A m r e^{-(r-h)t}, \\ \Delta = B l e^{(r-h)t} - A m e^{-(r-h)t}. \end{cases}$$

Dans les deux tableaux, tous les coefficients sont arbitraires, sous la seule restriction $r - h \neq 0$.

Les expressions ainsi obtenues pour X et Y ne sont que les types analytiques dans lesquels il faut chercher les solutions de notre problème. A cet effet, je les substitue dans l'équation (S), qui se décompose en deux autres, équivalentes à celles-ci

$$(T) \quad \begin{cases} [3(T_1 + T_2 - T_3 - T_4) - 8i] T \\ + (2r + 2h - 3i)(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 0. \end{cases}$$

$$(S) \quad \begin{cases} 4(T' + T^2 - 2rh - 1) + 3T(T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \\ + (2r + 2h - 3i)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) = 0. \end{cases}$$

Pour les expressions (I) des fonctions T_i qui correspondent à $r = h = c$, ces équations sont incompatibles. Il reste donc à discuter les solutions qui composent le système (II). On reconnaît d'abord que l'équation (T) peut se réduire à une identité, et l'on trouve ainsi un élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = e^{-i(x-y)} e^{-2t \frac{x+y}{2}} \cos \frac{x+y}{4} dx dy,$$

qui rentre dans le type (e) tout en admettant une infinité d'autres formes harmoniques.

Nous tirons ensuite de l'équation (T) l'expression de T pour la porter dans l'équation (S). Le résultat de cette substitution est naturellement compliqué. On le simplifie par la mise en évidence du facteur Δ commun à tous ses termes; mais il reste encore une

fonction linéaire de huit exponentielles

$$e^{\pm rt}, \quad e^{\pm ht}, \quad e^{\pm(r-h)t}, \quad e^{\pm(r+h)t},$$

qu'il faut rendre identiquement nulle en déterminant convenablement les arbitraires A, B, l, m, r, h . La discussion du système d'équations algébriques auxquelles on est conduit comporte l'examen de cas assez nombreux, qui se rangent sous trois hypothèses principales :

1° Tous les exposants sont différents de zéro et différents les uns des autres;

2° Tous les exposants sont différents de zéro, mais certains d'entre eux sont égaux;

3° Certains exposants sont nuls.

La première hypothèse ne donne rien; la troisième ne donne que des développables. La deuxième conduit à trois éléments linéaires

$$(2) \quad ds^2 = e^{-l(x-y)} \left(e^{i\frac{x+y}{b}} + e^{-3i\frac{x+y}{b}} \right) dx dy.$$

$$(3) \quad ds^2 = e^{-l(x-y)} \left(\cos \frac{x+y}{2} + \frac{5}{3} \right) dx dy.$$

$$(4) \quad ds^2 = e^{-l(x-y)} \cos \frac{x+y}{3} dx dy.$$

qui rentrent dans le type (m) tout en admettant une infinité de formes harmoniques. Le dernier est le seul qui convienne à des spirales doublement harmoniques et à des surfaces de révolution. Finalement, je conclus que *tous les éléments linéaires cherchés rentrent dans l'un des trois types (m) , (c) , (l) et que les seuls qui soient doublement harmoniques sont les éléments linéaires (1) , (2) , (3) et (4) .*

Le Mémoire se termine sur ce résultat. Je n'y aborde point la recherche des spirales qui admettent les éléments linéaires trouvés. Je renverrai à une Note que j'avais publiée antérieurement *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*. (Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1421; 1891.)

DÉMONSTRATION DES FORMULES FONDAMENTALES DE LA PÉRIMORPHIE
ET DES FORMULES DE CODAZZI;

Par M. BALITRAND.

Les formules que nous allons établir ne diffèrent pas, au fond, de celles qui ont été données par Ribaucour ⁽¹⁾, et qui constituent la base de la méthode à laquelle il a donné le nom de *périmorphie*. Mais la démonstration de nos formules est plus simple, et la signification géométrique des éléments qui y figurent plus évidente. Elles conduisent immédiatement, et sous une forme très avantageuse, aux formules de Codazzi.

Étant donnés une courbe gauche (c) et un point M sur cette courbe, menons au point M le trièdre formé par la tangente Mx , la normale principale My et la binormale Mz , ou trièdre principal. On passe de la position $Mxyz$ à une position infiniment voisine par une translation ds et par une rotation dont les composantes sont $-\frac{ds}{r}$, 0 , $\frac{ds}{\rho}$, ρ et r désignant les rayons de courbure et de torsion de la courbe (c) au point M. Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport au trièdre principal, on a les formules ⁽²⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \delta x = dx + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) ds, \\ \delta y = dy + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r}\right) ds, \\ \delta z = dz - \frac{y}{r} ds, \end{cases}$$

la caractéristique δ se rapportant au déplacement absolu du point P, la caractéristique d au déplacement relatif.

(1) *Étude sur les élassoïdes* (Mémoires couronnés, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique; 1881). — (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1891).

(2) Ces formules sont très connues. M. Cesaro en a fait un emploi systématique dans l'étude intrinsèque des courbes gauches et les a étendues à l'hyperespace (*Annali di Matematica*; 1887 — *Rendiconti, della R. Accademia dei Lincei*; 1889). — Voir aussi le travail de M. ROQUET, *Sur les formules fondamentales de la théorie des courbes gauches* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse).

Si, au lieu du trièdre principal, on considère le trièdre formé par la tangente Mx et par deux droites My , Mz , situées dans le plan normal, la droite My étant inclinée d'un angle θ sur la binormale, on a les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \delta x = dx + ds + \frac{1}{\rho} (z \sin \theta - y \cos \theta) ds, \\ \delta y = dy + \frac{x \cos \theta}{\rho} ds - z \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds, \\ \delta z = dz + y \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds - \frac{x \sin \theta}{\rho} ds. \end{cases}$$

Passons aux éléments du second ordre. Les formules (1) donnent aisément

$$(3) \quad \begin{cases} \delta^2 x = d^2 x + d^2 s - y d \frac{ds}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r} \right) ds^2 - 2 \frac{dy ds}{\rho}, \\ \delta^2 y = d^2 y + x d \frac{ds}{\rho} + z d \frac{ds}{r} - y \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right) ds^2 + 2 \frac{dx ds}{\rho} + 2 \frac{dz ds}{r}, \\ \delta^2 z = d^2 z - y d \frac{ds}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r} \right) ds^2 - \frac{2 dy ds}{r}, \end{cases}$$

et les formules (2) les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \delta^2 x = d^2 x + d^2 s + z d \frac{\sin \theta ds}{\rho} - y d \frac{\cos \theta ds}{\rho} \\ \quad + \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) H - K^2 x + \frac{2 ds}{\rho} (\sin \theta dz - \cos \theta dy), \\ \delta^2 y = d^2 y + x d \frac{\cos \theta ds}{\rho} - z d \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds \\ \quad + \frac{\sin \theta}{\rho} H - K^2 y + \frac{2 dx ds \cos \theta}{\rho} - 2 \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) dz ds, \\ \delta^2 z = d^2 z + y d \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds + x d \frac{\sin \theta ds}{\rho} \\ \quad + \frac{\cos \theta}{\rho} H - K^2 z + 2 \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) dy ds - \frac{2 dx ds \sin \theta}{\rho}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5) \quad \begin{cases} H = x \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds^2 + \frac{1}{\rho} (y \sin \theta + z \cos \theta) ds^2, \\ K^2 = \frac{ds^2}{\rho^2} + \left(\theta' - \frac{1}{r} \right)^2 ds^2. \end{cases}$$

Considérons maintenant une surface de référence (s) qui, rap-

portée à deux systèmes de courbes orthogonales, admet pour élément linéaire

$$ds^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2.$$

Considérons le trièdre principal formé par la normale à la surface Oz et par les tangentes Ox et Oy aux courbes (u) et (v) , et soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport à ce trièdre. Lorsqu'on passe de la position $Oxyz$ à une position infiniment voisine $O'x'y'z'$, on a les formules

$$(6) \begin{cases} \delta x = dx + g dv + \frac{1}{\rho_1} (z \sin \theta_1 - y \cos \theta_1) g dv + \left[z \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{y \cos \theta}{\rho} \right] f du, \\ \delta y = dy + f du + \left[\frac{x \cos \theta_1}{\rho_1} - z \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) \right] g dv + \frac{1}{\rho} (z \sin \theta - y \cos \theta) f du, \\ \delta z = dz + \left[y \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{x \sin \theta_1}{\rho_1} \right] g dv + \left[\frac{y \sin \theta}{\rho} - x \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) \right] f du. \end{cases}$$

On les obtient en appliquant les formules (2) à deux déplacements successifs effectués suivant (u) et (v) ; ρ_1 et r_1 désignent les rayons de courbure et de torsion de la courbe (u) , θ_1 l'angle de son plan osculateur avec le plan tangent à la surface; ρ, r, θ ont la même signification pour la courbe (v) .

Nous poserons

$$(7) \begin{cases} M = \frac{g \cos \theta_1}{\rho_1}, & P = \frac{g \sin \theta_1}{\rho_1}, & R = g \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right), \\ N = \frac{f \cos \theta}{\rho}, & Q = \frac{f \sin \theta}{\rho}, & S = f \left(\theta' - \frac{1}{r} \right). \end{cases}$$

Les six quantités M, N, P, Q, R, S ont une signification géométrique bien connue, et les formules (6) s'écrivent alors

$$(8) \begin{cases} \delta x = dx + g dv + z (P dv + S du) - y (M dv + N du), \\ \delta y = dy + f du + x (M dv + N du) - z (R dv + Q du), \\ \delta z = dz + y (R dv + Q du) - x (L dv + S du). \end{cases}$$

Les conditions de fixité du point x, y, z dans l'espace sont données par les six relations

$$(9) \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} + S z - N y = 0, & \frac{\partial x}{\partial v} + g + P z - M y = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} + f + N x - Q z = 0, & \frac{\partial y}{\partial v} + M x - R z = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial u} + Q y - S x = 0, & \frac{\partial z}{\partial v} + R y - P x = 0, \end{cases}$$

et celles de la direction l, m, n par les relations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial l}{\partial u} + S n - N m = 0, & \frac{\partial l}{\partial v} + P n - M m = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial u} + N l - Q n = 0, & \frac{\partial m}{\partial v} + M l - R n = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial u} + Q m - S l = 0, & \frac{\partial n}{\partial v} + R m - P l = 0. \end{array} \right.$$

Pour exprimer les conditions d'invariabilité d'une droite, il faut joindre aux conditions d'invariabilité de sa direction celles de la fixité d'un de ses points. Si la droite

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}$$

est donnée par ses six coordonnées

$$l, m, n, \quad l' = ny - mz, \quad m' = lz - nx, \quad n' = mx - ly,$$

il faut joindre aux relations (10) les relations qui expriment la fixité du vecteur l', m', n' .

Le plan

$$lx + my + nz - p = 0$$

sera fixe dans l'espace, si aux conditions (10) on ajoute les relations

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -mf, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -lg.$$

Exprimons que les dérivées de l, m, n fournies par les relations (10) satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v}, \quad \dots;$$

on obtient ainsi les relations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial v} + PQ - RS = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial v} + RN - QM = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial v} + SM - PN = 0. \end{array} \right.$$

Opérant de même sur les dérivées de x, y, z tirées des équations (9) et tenant compte de (11), on trouve

$$(12) \quad M = -\frac{1}{f} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad N = \frac{1}{g} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad Rf + Sg = 0.$$

Ce sont les formules de Codazzi (1).

Pour faire une application des formules précédentes, prenons la représentation sphérique de la surface de référence.

Par un point fixe O de l'espace, menons une parallèle à la normale à la surface au point M, parallèle sur laquelle nous prenons une longueur constante $OP = a$. Les formules (8) nous donnent pour les coordonnées x, y, z du point P

$$\partial x = a(P dv + S du), \quad \partial y = -a(R dv + Q du), \quad \partial z = 0;$$

d'où, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(13) \quad d\sigma^2 = a^2(P dv + S du)^2 + a^2(R dv + Q du)^2.$$

Le système orthogonal de la surface de référence admettra, comme représentation sphérique, un système orthogonal si $R = 0, S = 0$, ce qui donne les lignes de courbure; ou bien si $P = 0, Q = 0$, ce qui donne les surfaces minima; et il est bien évident que ce sont les seuls cas où cela puisse avoir lieu.

Si les lignes (u) et (v) sont les lignes de courbure de la surface (S) , l'expression (13) devient

$$d\sigma^2 = a^2 \left(\frac{g^2 dv^2}{R_1^2} + \frac{f^2 du^2}{R^2} \right) = a^2 ds^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} \right),$$

α désignant l'angle que fait la courbe considérée avec la courbe (u) . On voit que la ligne définie par la relation

$$\frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} = \frac{1}{a^2}$$

(1) CODAZZI, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; 1882.

O. BONNET, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*; 1867).

Sur les formules fondamentales de la périmorphie on peut consulter, outre les *Mémoires* de Ribaucour, les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. Darboux, et le Tome VII du *Traité d'Analyse* de M. Laurent.

est égale en arc à sa représentation sphérique. On voit encore que la représentation sphérique d'une surface minima réalise un tracé géographique de la surface sur la sphère.

L'angle V d'une courbe avec sa représentation sphérique est donné par la formule

$$\text{tang } V = \pm \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) f g \, du \, dv}{\frac{f^2 \, du^2}{R} + \frac{g^2 \, dv^2}{R_1}}.$$

Cette relation, nouvelle croyons-nous, montre que, par chaque point d'une surface, passent quatre lignes faisant un angle donné avec leur représentation sphérique. Ces quatre lignes sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Il n'y a d'exception que si

$$\frac{f^2 \, du^2}{R} + \frac{g^2 \, dv^2}{R_1} = 0,$$

ce qui correspond aux lignes asymptotiques; et l'on voit que la représentation sphérique d'une ligne asymptotique est perpendiculaire à cette ligne, propriété bien connue.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUIN 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Painlevé : *Sur une démonstration de l'existence des fonctions implicites analytiques.*

M. Humbert : *Sur quelques propriétés des arcs des courbes gauches.*

M. E. Genty adresse une Note *Sur les surfaces à courbure totale constante.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Adam : *Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux.*

M. Fouret : *Sur un théorème relatif aux quadriques.*

M. Lancelin : *Sur deux cas particuliers du problème des trois corps.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE PAR CERTAINES CONDITIONS AUX LIMITES;

Par M. ÉMILE PICARD.

1. Une question posée par M. Carvallo dans le dernier numéro de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (question 173) me remet en mémoire quelques remarques que j'ai faites autrefois sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Considérons l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

a , b , c étant des fonctions continues de x et y . Dans mon Mémoire sur les approximations successives (*Journal de Mathématiques*, 1890, Chap. II), j'ai montré comment une méthode d'approximations permettait d'intégrer cette équation en se donnant diverses conditions aux limites. Prenons maintenant le cas suivant : on veut avoir l'intégrale de cette équation telle que

$$(1) \quad \begin{cases} z = f(x) & (\text{pour } y = 0), \\ z = \varphi(x) & (\text{pour } y = x); \end{cases}$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions arbitrairement données. On a seulement, bien entendu, $f(0) = \varphi(0)$.

2. Je fais d'abord les remarques suivantes. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, est évidemment

$$z = f(x) + \varphi(y) - f(y).$$

Ensuite l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = P(x, y),$$

P étant une fonction donnée et telle que

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0 & (\text{pour } y = 0), \\ u = 0 & (\text{pour } y = x), \end{cases}$$

se réduit à

$$u = \int_0^y d\tau \int_x^x P(\xi, \tau) d\xi.$$

3. Ceci posé, je forme les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}. \end{aligned}$$

On calcule z_0 de façon qu'il satisfasse aux conditions (1), et les u de façon qu'ils satisfassent aux conditions (2). Il est aisé d'établir que la série

$$(3) \quad z_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

résout le problème proposé. Si les a , b , c ainsi que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont bien déterminées et continues dans un rectangle parallèle

aux axes et comprenant l'origine, la série (3) convergera dans ce rectangle. Si, en particulier, les fonctions précédentes sont bien déterminées et continues dans tout le plan (x, y) , il en sera de même de la solution que nous venons d'obtenir.

4. Le problème précédent pourrait être généralisé. On peut se proposer de trouver l'intégrale z de l'équation (E) telle que

$$\begin{aligned} z &= f(x) & (\text{pour } y = \alpha x), \\ z &= \varphi(x) & (\text{pour } y = \beta x), \\ [f(\alpha) &= \varphi(\alpha)]; \end{aligned}$$

α et β sont deux constantes réelles, et l'on doit supposer que α^2 est différent de β^2 . Les mêmes considérations sont applicables; les choses se présentent toutefois moins simplement, car l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, ne s'obtient pas ici immédiatement comme au n° 2. Soit, en effet,

$$z = \lambda(x) + \mu(y);$$

on aura

$$\begin{aligned} \lambda(x) + \mu(\alpha x) &= f(x), \\ \lambda(x) + \mu(\beta x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

et, par suite, l'équation fonctionnelle

$$\mu(\alpha x) - \mu(\beta x) = f(x) - \varphi(x).$$

Si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur

$$\chi(x) = f(x) - \varphi(x),$$

on ne peut résoudre cette équation fonctionnelle. Tout d'abord nous ne diminuons pas la généralité en supposant $\alpha = 1$, $|\beta| < 1$. Si de plus on suppose la fonction $\chi(x)$ telle que

$$|\chi(x)| < A |x|^p,$$

A et p étant des constantes positives, on pourra prendre

$$\mu(x) = \chi(x) + \chi(\beta x) + \dots + \chi(\beta^n x) + \dots$$

et la solution du problème s'achèvera aisément.

5. La question posée par M. Carvallo, dont j'ai parlé plus haut, était relative à l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - u,$$

se réduisant pour $r = 0$ à une fonction $f(t)$, et à $f(0)$ pour $r = t$. Un simple changement de variables ramène ce problème à celui que nous avons traité d'une manière générale au n° 3.

SUR LES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE;

Par M. E. GENTY.

Dans son remarquable Mémoire *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces*, M. Cosserat donne un certain nombre de formules, qui établissent une liaison étroite entre la théorie des surfaces et celle des congruences des droites.

Nous allons montrer, dans cette Note, comment la théorie des congruences conduit simplement, pour les surfaces à courbure totale constante, aux transformations de MM. Bianchi et Bäcklund (DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 420 à 438).

En conservant toutes les notations de M. Cosserat, on sait que la demi-distance focale ρ d'une congruence rectiligne donnée par la représentation sphérique de ses développables satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial v^2} + f \right) \rho = 0.$$

Si l'on a

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial v^2} + f = 0,$$

l'équation (1) sera vérifiée par $\rho = \text{const.}$, et, dans ce cas, les équations qui expriment que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface focale prennent la forme

$$\frac{\beta}{\alpha_1} = \frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{\beta_1 \gamma - \beta^2 - \varepsilon}{\beta_1^2 - \alpha_1 \beta + c} = -\frac{\varepsilon}{c}$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} e\beta + g\alpha_1 = 0, \\ e\gamma + g\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Or on a

$$h^2\alpha_1 = e \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} \right) - \frac{f}{2} \frac{\partial e}{\partial u},$$

$$h^2\beta = \frac{g}{2} \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{2} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$h^2\beta_1 = \frac{e}{2} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2} \frac{\partial e}{\partial v},$$

$$h^2\gamma = g \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \right) - \frac{f}{2} \frac{\partial g}{\partial v},$$

où l'on a posé

$$h^2 = ef - g^2.$$

En tenant compte de ces relations, on met les équations (3) sous la forme

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial u} = \frac{\partial \log(e g)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial v} = \frac{\partial \log(e g)}{\partial v},$$

d'où

$$\frac{f^2}{e g} = \cos^2 \theta = \text{const.},$$

ce qui montre que les plans tangents aux points F_1 et F_2 des deux nappes de la surface focale se coupent sous un angle constant θ .

La réciproque est évidente et, si ρ et θ sont des constantes, les lignes de courbure et, par suite aussi, les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

La courbure totale au point F_1 de la première nappe a alors pour expression, en supposant $2\rho = 1$,

$$\frac{1}{R_1 R'_1} = \frac{h^2 \gamma}{g^2 \beta_1} = - \frac{h^2}{e g} = - \sin^2 \theta;$$

on trouve de même, pour la courbure totale au point F_2 de la seconde nappe,

$$\frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{h^2 \alpha_1}{e^2 \beta} = - \sin^2 \theta;$$

donc les deux nappes de la surface focale ont leur courbure totale constante et égale à $-\sin^2 \theta$.

Les lignes de courbure des deux nappes ont pour équation

$$(4) \quad \beta\beta_1 du^2 + (\beta_1\gamma - \beta^2 - g) du dv - \beta\gamma dv^2 = 0,$$

et l'équation définissant les rayons de courbure principaux de la seconde nappe prend la forme

$$(5) \quad \alpha_1 h^2 R^2 - h \sqrt{e} (\alpha_1 \beta + \beta_1^2 + e) R + e^2 \beta = 0.$$

Soit (du, dv) l'une des solutions de l'équation (4); le plan normal à cette direction mené par le point F_1 , lequel est un plan principal de la nappe (F_1) , rencontre la normale de la seconde nappe en un point A, et, si l'on désigne par R la distance $F_2 A$, on reconnaît très simplement que cette distance est définie par l'équation

$$\beta_1 du - \beta dv + \frac{h R dv}{\sqrt{e}} = 0.$$

Si l'on élimine du et dv entre cette équation et l'équation (4), il vient

$$\beta(\beta\sqrt{e} - hR)^2 + \sqrt{e}(\beta_1\gamma - \beta^2 - g)(\beta\sqrt{e} - hR) - \beta\beta_1\gamma e = 0.$$

En développant cette équation et tenant compte des relations (3), on retrouve l'équation (5). Donc :

Si deux surfaces se correspondent point par point de telle manière que la distance entre ces deux points soit constante, et que les deux plans tangents en ces deux points contiennent la droite qui les joint et forment entre eux un angle constant θ , les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, pour lesquelles les courbures totales sont constantes et égales à $-\frac{\sin^2 \theta}{p^2}$, p étant la distance constante des deux points correspondants.

Pour $\theta = 90^\circ$, on a la transformation de M. Bianchi; si θ est un angle quelconque, on a la transformation de M. Bäcklund.

Dans le premier cas, la congruence est une congruence de normales et l'équation (1) devient

$$(6) \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = 0.$$

On en déduit immédiatement

$$eg = \varphi(u) \psi(v),$$

ou, en particulierisant convenablement les paramètres,

$$(7) \quad eg = 1.$$

La relation qui précède, jointe à $f = 0$, caractérise la représentation sphérique des surfaces pour lesquelles la différence des rayons de courbure est constante.

Remarquons enfin que, dans ce cas, l'élément linéaire de la surface (F_1) a pour expression

$$ds^2 = (\beta_1 du - \beta dv)^2 + e dv^2;$$

or la relation (6) montre qu'on peut poser

$$\beta_1 du - \beta dv = du_1.$$

On a donc

$$ds^2 = du_1^2 + e dv^2,$$

ce qui montre que v est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_1) . On verrait de même que u est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_2) .

Les trajectoires orthogonales de ces géodésiques se correspondent sur les deux nappes et elles ont pour équation différentielle

$$\beta_1 du - \beta dv = 0,$$

ou

$$e \frac{\partial g}{\partial u} du - g \frac{\partial e}{\partial v} dv = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \log e}{\partial v} dv - \frac{\partial \log g}{\partial u} du = 0,$$

ou enfin, en tenant compte de la relation (7),

$$\frac{\partial \log e}{\partial u} du + \frac{\partial \log e}{\partial v} dv = 0.$$

Donc leur équation finie est $e = \text{const.}$

**SUR LES SURFACES ADMETTANT POUR LIGNES DE COURBURE
DEUX SÉRIES DE CERCLES GÉODÉSIQUES ORTHOGONAUX;**

Par M. PAUL ADAM.

Dans son Mémoire célèbre sur la déformation des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier) O. Bonnet a déterminé la surface la plus générale admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux. Sa méthode, qui repose sur l'emploi des formules de Codazzi, donne lieu à des calculs, sinon pénibles, du moins fort longs : la formation des équations de la surface prend dix-sept pages.

Or, si les formules de Codazzi facilitent, dans bien des cas, la résolution des problèmes, il en est d'autres où le contraire a lieu. Ici, par exemple, on peut déterminer les surfaces en question par une marche beaucoup plus simple que celle de Bonnet.

Si l'on écrit le ds^2 d'une surface isothermique

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la détermination d'une telle surface revient à la recherche de trois solutions x, y, z de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

liées entre elles par la condition

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces qui admettent pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux, ayant pour ds^2

$$ds^2 = \frac{1}{(U+V)^2} (du^2 + dv^2),$$

il suffit, pour les obtenir, de trouver trois solutions de l'équation suivante

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{U+V} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{U'}{U+V} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

et d'avoir égard à (1).

L'équation (2) s'intègre tout de suite et donne

$$(3) \quad 0 = \frac{U_1 + V_1}{U + V},$$

où les lettres ont une signification évidente.

Il faut donc prendre pour x, y, z trois expressions de la forme (3), en leur donnant, bien entendu, le même dénominateur $U + V$, puis déterminer les fonctions qui entrent en numérateur par la condition (1).

On peut évidemment, en prenant U et V pour nouvelles variables, écrire

$$x, y, z = \frac{U_1 + V_1, U_2 + V_2, U_3 + V_3}{u + v},$$

x, y, z étant toujours astreintes à la relation (1), laquelle fournit

$$(4) \quad \begin{cases} (u + v)^2 (U_1' V_1' + U_2' V_2' + U_3' V_3') \\ - (u + v) [(U_1 + V_1)(U_1' + V_1') \\ + (U_2 + V_2)(U_2' + V_2') + (U_3 + V_3)(U_3' + V_3')] \\ + (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation fonctionnelle paraît compliquée; mais, si l'on pose

$$(U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 2(u + v) \varphi(u, v),$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0,$$

de sorte qu'elle revient à

$$(5) \quad (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 + 2(u + v)(U_4 + V_4) = 0.$$

Cette équation, étant développée, a pour premier membre une somme de termes de la forme $F(u)\Phi(v)$. Or l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i B_i = 0,$$

dans laquelle les A dépendent d'une variable α et les B d'une autre variable β , admet, outre les deux solutions évidentes qui

consistent à annuler soit tous les A , soit tous les B , $n - 1$ autres solutions définies par les formules

$$A_j = \sum_{k=1}^{k=l} a_k^j A_k, \quad j = l+1, \quad l+2, \quad \dots, \quad n,$$

$$-B_{j'} = \sum_{k=l+1}^{k=n} a_{j'}^k B_k, \quad j' = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad l,$$

dans lesquelles les a sont des constantes arbitraires; et ces $n - 1$ solutions s'obtiennent en donnant à l les valeurs $1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Appliquons cela à l'équation (5) développée, en faisant jouer aux fonctions de u et de v ci-après le rôle des fonctions A et B écrites en regard :

1	$A_1,$	$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4v$	$B_1,$
u	$A_2,$	$2V_4$	$B_2,$
U_1	$A_3,$	$2V_1$	$B_3,$
U_2	$A_4,$	$2V_2$	$B_4,$
U_3	$A_5,$	$2V_3$	$B_5,$
U_4	$A_6,$	$2v$	$B_6,$
$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4u$	$A_7,$	1	$B_7.$

En ayant égard à la symétrie de l'équation (5), on voit qu'il n'y a, pour cette équation, que deux solutions à essayer, celles qui correspondent à $l = 2$ et à $l = 3$. En effet, si l'on change le classement qui vient d'être indiqué pour les fonctions de u et de v ci-dessus, en rangeant les fonctions de v dans l'ordre inverse de celui qu'avaient les fonctions analogues de u , les hypothèses $l = 4$ et $l = 5$ conduiront aux mêmes solutions de l'équation (5), sauf remplacement de u par v et de v par u , que les hypothèses $l = 3$ et $l = 2$. On aboutira donc pour les coordonnées de la surface aux expressions données par $l = 3$ et $l = 2$, où l'on changerait u en v et v en u .

1° *Hypothèse* $l = 2$. — Dans cette hypothèse, U_1 , U_2 et U_3 sont des fonctions linéaires de u ; il en résulte que, par un transport des axes parallèlement à eux-mêmes, les coordonnées de la

surface peuvent être ramenées à la forme

$$(6) \quad \frac{\varphi(\nu)}{u + \nu};$$

la surface serait alors un cône dont les génératrices auraient pour paramètre ν ; tous les cônes répondent évidemment à la question; toutefois, en achevant le calcul, on reconnaît que des coordonnées de la forme (6) ne peuvent vérifier la relation (1); cela tient à ce que nous avons particularisé les fonctions U et V , et qu'il faudrait actuellement faire $V = 0$ pour que les courbes (u) pussent être, sur le cône, les trajectoires orthogonales des génératrices.

2° *Hypothèse* $l = 3$. — Il vient alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_2 = a_1^1 + a_2^1 u + a_3^1 U_1, \\ U_3 = a_1^2 + a_2^2 u + a_3^2 U_1, \\ U_4 = a_1^3 + a_2^3 u + a_3^3 U_1, \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2 U_4 u = a_1^4 + a_2^4 u + a_3^4 U_1, \\ -(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2 V_4 \nu) = 2 a_1^1 V_2 + 2 a_2^1 V_3 + 2 a_3^1 \nu + a_1^7, \\ \quad - 2 V_4 = 2 a_2^2 V_2 + 2 a_3^2 V_3 + 2 a_2^3 \nu + a_2^7, \\ \quad - 2 V_1 = 2 a_2^3 V_2 + 2 a_3^3 V_3 + 2 a_3^3 \nu + a_3^7. \end{array} \right.$$

Ces équations se simplifient beaucoup par les remarques suivantes.

D'abord U_2 et U_3 étant des fonctions linéaires de u et de U_1 , les coordonnées y et z de la surface se ramènent, par un transport des axes parallèlement au plan des yz , à la forme

$$\frac{m U_1 + \varphi(\nu)}{u + \nu} \quad (m = \text{const.}).$$

On peut donc, sans restreindre la généralité du résultat, supposer U_2 et U_3 de la forme $m U_1$, c'est-à-dire faire

et l'on a alors

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{U_1 + V_2}{u + \nu}, \\ y = \frac{a_2^1 U_1 + V_2}{u + \nu}, \\ z = \frac{a_3^1 U_1 + V_3}{u + \nu}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(y - a_1^1 x)(V_3 - a_3^1 V_1) - (z - a_2^1 x)(V_2 - a_2^1 V_1) = 0.$$

Les courbes (v) sont donc dans des plans passant par la droite fixe

$$y = a_1^1 x, \quad z = a_2^1 x.$$

Cette droite étant prise pour axe des x , il vient

$$a_3^1 = a_2^1 = 0.$$

Les équations (8) de la surface et la dernière des équations de condition (7) se réduisent ainsi à

$$(9) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1 + V_1}{u + v}, \\ y = \frac{V_2}{u + v}, \\ z = \frac{V_3}{u + v}, \end{cases}$$

$$(10) \quad 2V_1 = -2a_3^2 v - a_1^1.$$

En transportant enfin les axes parallèlement à Ox , ce qui ne change pas ce dernier axe déjà particularisé, on donne à la coordonnée x la forme $\frac{f(u)}{u + v}$; on peut, en conséquence, supposer la fonction V_1 nulle, c'est-à-dire faire $a_3^2 = a_1^1 = 0$.

En définitive, les équations (9) de la surface et les équations de condition (7) sont maintenant

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1}{u + v}, \\ y = \frac{V_2}{u + v}, \\ z = \frac{V_3}{u + v}, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} U_1 = a_1^2 + a_2^1 u, \\ U_1^2 + 2U_1 u = a_1^1 + a_2^1 u, \\ V_2^2 + V_3^2 + 2V_1 v = -2a_1^2 v - a_1^1, \\ 2V_1 = -2a_2^2 v - a_2^1. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{aligned}V_2 &= V_6 \cos V_5, \\V_3 &= V_6 \sin V_5,\end{aligned}$$

V_5 et V_6 étant deux nouvelles fonctions de v , on tire des équations (12)

$$\begin{aligned}U_1^2 &= -2a_1^2 u^2 + u(a_1^2 - 2a_1^2) + a_1^2, \\V_6^2 &= 2a_1^2 v^2 + v(a_1^2 - 2a_1^2) - a_1^2,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire tout simplement, en passant à une surface homothétique, et appelant a et b deux constantes arbitraires,

$$\begin{aligned}U_1^2 &= -u^2 + 2au + b, \\V_6^2 &= v^2 + 2av - b.\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à remplacer u par $u + h$ et v par $v - h$, à prendre pour h l'une des racines de l'équation

$$h^2 - 2ah - b = 0$$

et à poser

$$2(a - h) = \alpha,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}U_1^2 &= \alpha u - u^2, \\V_6^2 &= \alpha v + v^2,\end{aligned}$$

puis les équations de Bonnet

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{u(\alpha - u)}}{u + v}, \\y &= \frac{\sqrt{v(\alpha + v)}}{u + v} \cos V_5, \\z &= \frac{\sqrt{v(\alpha + v)}}{u + v} \sin V_5,\end{aligned} \right.$$

qui comprennent, comme cas particulier, les équations des cyclides de Dupin.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JUILLET 1894.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

- M. Fleury : *Sur l'emploi des séries divergentes.*
M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*
M. Raffy : *Remarques sur le problème général de la déformation des surfaces.*
-

SÉANCE DU 18 JUILLET 1894.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement d'un corps attiré par une droite ou deux droites rectangulaires suivant la loi de l'inverse d'une puissance positive de la distance.*

M. Kænigs : *Sur les ds^2 dits harmoniques.*

M. Raffy présente quelques observations à ce sujet.

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Blutel : *Sur quelques surfaces qui possèdent des asymptotiques cubiques.*

M. Demoulin : *Sur des couples de surfaces applicables, dont les points correspondants sont à une distance constante.*

M. P. PAINLEVÉ adresse la Communication suivante :

Note sur une identité entre certains déterminants.

Dans un travail sur les équations de la Mécanique et du Calcul des variations, j'ai rencontré l'identité suivante (voir le *Journal de Mathématiques*, p. 45; 1894) :

Soient T une fonction homogène quelconque d'ordre α ⁽¹⁾

(¹) α est une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

des $(p+1)$ variables $x, x_1, x_2, \dots, x_p$, et τ la fonction obtenue en faisant $x = 1$ dans T . Soient, d'autre part, Δ le Hessien de T , et δ le déterminant $|a_{ij}|$ à p lignes et p colonnes dont le terme général a_{ij} est

$$\alpha \tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} - (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j}.$$

Si l'on fait $x = 1$ dans Δ , on a identiquement

$$(1) \quad (\alpha - 1) \delta \equiv \alpha^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On peut dire encore que le Hessien

$$\Delta_1 \equiv \frac{\delta}{\alpha^{2p} \tau \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)^p}$$

de la fonction

$$[T(1, x_1, x_2, \dots, x_p)]^{\frac{1}{\alpha}}$$

coïncide avec l'expression

$$\frac{\Delta}{\alpha^{p+1}(\alpha - 1)} \frac{1}{T^p \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{p+1}}$$

(où l'on a fait $x = 1$). En particulier, si $\alpha = 2$, Δ est le discriminant de la forme quadratique T et ne dépend plus des x ; on a alors

$$\delta \equiv 2^{p-1} \Delta \tau^{p-1}, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\Delta}{2^{p+1}} \frac{1}{\tau^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Voici une démonstration directe bien simple de cette identité.

Si l'on observe que, dans δ , deux lignes partielles

$$\begin{aligned} & -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad \dots, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \\ & -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad \dots, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

sont identiques à un facteur près, on voit, en appelant d le Hessien de τ et d_i le déterminant obtenu en remplaçant dans d la $i^{\text{ème}}$ ligne par la ligne

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_p},$$

que le déterminant δ se met sous la forme

$$\delta \equiv x^{p-1} x^{-1} \left[x \cdot d - x - 1 \left(\frac{\sigma_1}{\alpha x_1} d_1 - \frac{\sigma_2}{\alpha x_2} d_2 - \dots - \frac{\sigma_p}{\alpha x_p} d_p \right) \right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\delta \equiv x^{p-1} x^{-1} \begin{vmatrix} x & \frac{\sigma_1}{\alpha x_1} & \frac{\sigma_2}{\alpha x_2} & \dots & \frac{\sigma_p}{\alpha x_p} \\ x-1 & \frac{\sigma_1}{\alpha x_1} & \frac{\sigma_2}{\alpha x_1^2} & \dots & \frac{\sigma_p}{\alpha x_1 x_p} \\ x-1 & \frac{\sigma_1}{\alpha x_2} & \frac{\sigma_2}{\alpha x_1 \alpha x_2} & \dots & \frac{\sigma_p}{\alpha x_2 \alpha x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-1 & \frac{\sigma_1}{\alpha x_p} & \frac{\sigma_2}{\alpha x_1 \alpha x_p} & \dots & \frac{\sigma_p}{\alpha x_p^2} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'autre part, transformons Δ .

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x^2} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x \alpha x_1} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x \alpha x_2} & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x \alpha x_p} \\ \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x \alpha x_1} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_1^2} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_1 \alpha x_2} & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_1 \alpha x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x \alpha x_p} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_2 \alpha x_p} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_2 \alpha x_p} & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x_p^2} \end{vmatrix},$$

en tenant compte des identités d'Euler

$$x \frac{\sigma^2 \Gamma}{x^2} - x_1 \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_1} - x_2 \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_2} - \dots - x_p \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_p} \equiv x - 1, \frac{\sigma^2 \Gamma}{\alpha x},$$

$$x_1 = x, x_2, \dots, x_p.$$

Si l'on multiplie la première ligne de Δ par x , la seconde par x_1 , la troisième par x_2 , etc., et si l'on fait la somme, on trouve pour Δ l'expression

$$\Delta \equiv \frac{x-1}{x} \begin{vmatrix} \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_1} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_2} & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_p} \\ \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x \alpha x_1} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_1^2} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_1 \alpha x_2} & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_1 \alpha x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x \alpha x_p} & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_2 \alpha x_p} & \dots & \dots & \frac{\sigma^2 \Gamma}{x x_p^2} \end{vmatrix} \equiv \frac{x-1}{x} \Delta'.$$

Transformons maintenant Δ' d'après l'identité d'Euler

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + x_p \frac{\partial T}{\partial x_p} \equiv \alpha T,$$

jointe aux précédentes; en multipliant la première colonne par x , la seconde par x_1 , etc., et additionnant, on trouve

$$\Delta \equiv \frac{\alpha - 1}{x^2} \begin{vmatrix} \alpha T & \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T}{\partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_p} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix};$$

d'où, en faisant $x = 1$ dans Δ , l'identité annoncée

$$(\alpha - 1) \delta \equiv \alpha^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On pourrait généraliser cette identité en introduisant les dérivées de T d'ordre supérieur au second.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. L. RAFFY.

1. Voici une proposition qui, malgré son étroite connexion avec une propriété bien connue des lignes asymptotiques, ne semble pas avoir été énoncée dans toute sa généralité :

Si les coordonnées de toutes les surfaces (Σ) qui admettent un même élément linéaire sont définies par des équations telles que

$$(1) \quad dx_i = A_i d\alpha + B_i d\beta, \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les A_i et les B_i sont des fonctions déterminées de deux variables α et β , de deux fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ d'un

seul argument chacune, ainsi que de leurs dérivées successives en nombre limité, les lignes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ sont les asymptotiques de toute surface (Σ) .

En effet, considérons en particulier une surface (Σ_0) qui répond à un choix déterminé des fonctions arbitraires

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \quad \psi(\beta) = \psi_0(\beta).$$

Si, dans les formules générales (1), nous donnons à β une valeur fixe β_0 , d'ailleurs quelconque, nous obtenons une courbe (C_0) de la surface (Σ_0) . Cette courbe est définie par les trois équations

$$dx_i = A_i[\alpha, \beta_0; \varphi_0(\alpha), \dots; \psi_0(\beta_0), \psi'_0(\beta_0), \dots, \psi_0^{(n)}(\beta_0)] d\alpha.$$

Cela posé, désignons par $\psi_1(\beta)$ l'une quelconque des fonctions de β qui satisfont aux $n + 1$ équations

$$\psi_1(\beta_0) = \psi_0(\beta_0), \quad \psi'_1(\beta_0) = \psi'_0(\beta_0), \quad \dots, \quad \psi_1^{(n)}(\beta_0) = \psi_0^{(n)}(\beta_0).$$

La surface (Σ_1) , obtenue en faisant dans les formules (1)

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \quad \psi(\beta) = \psi_1(\beta),$$

est applicable sur la surface (Σ_0) , puisqu'on suppose applicables les unes sur les autres toutes les surfaces définies par ces formules, quelles que soient les expressions attribuées aux fonctions φ et ψ . Mais, à raison des conditions imposées à la fonction $\psi_1(\beta)$, la surface (Σ_1) passe par la courbe (C_0) de la surface (Σ_0) , comme on le voit en donnant à β la valeur fixe β_0 . Dès lors, la surface (Σ_0) pouvant être déformée sans que la courbe (C_0) le soit, cette courbe est, en vertu d'un théorème connu ⁽¹⁾, une asymptotique de la surface (Σ_0) . On prouverait de même que les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont aussi des asymptotiques ⁽²⁾.

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 280.

⁽²⁾ Le raisonnement qui précède a plus de généralité que la proposition énoncée. Il prouve notamment la suivante : Si les formules

$$dx_i = A_i d\alpha + B_i d\beta \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les A_i et B_i sont des fonctions déterminées de deux variables α et β , d'une fonction arbitraire $\psi(\beta)$, ainsi que de ses dérivées successives en nombre limité, définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres, les lignes $\beta = \text{const.}$ sont des asymptotiques pour chacune de ces surfaces.

2. Comme exemples de ce théorème, je citerai les diverses surfaces (à courbure totale différente de zéro) dont on connaît toutes les déformations, successivement découvertes par M. Weingarten ou déduites de ses travaux par M. Goursat⁽¹⁾. Dans tous ces cas, en effet, les coordonnées des surfaces cherchées (Σ) sont déterminées par des formules pareilles à celles qui figurent dans l'énoncé ci-dessus; et M. Goursat, en étudiant la transformation imaginée par M. Weingarten, a implicitement établi que les variables α et β sont les paramètres des lignes asymptotiques des surfaces (Σ).

On voit que, quand un problème de déformation comporte une solution complète du type défini par l'énoncé de notre théorème, c'est à leurs asymptotiques qu'il faut rapporter les surfaces cherchées pour que les différentielles de leurs coordonnées prennent la forme dont il s'agit. Ceci suggère, pour traiter les questions d'applicabilité, deux procédés généraux, inverses l'un de l'autre, que nous emploierons successivement pour retrouver les beaux résultats qui viennent d'être rappelés.

3. *Premier procédé.* — Partons des formules par lesquelles M. Lelievre⁽²⁾ a exprimé les différentielles des coordonnées d'une surface au moyen des paramètres α et β de ses asymptotiques :

$$(2) \quad \begin{cases} dx = (MN'_\alpha - NM'_\alpha) d\alpha - (MN'_\beta - NM'_\beta) d\beta, \\ dy = (NL'_\alpha - LN'_\alpha) d\alpha - (NL'_\beta - LN'_\beta) d\beta, \\ dz = (LM'_\alpha - ML'_\alpha) d\alpha - (LM'_\beta - ML'_\beta) d\beta. \end{cases}$$

Les fonctions L, M, N sont trois solutions quelconques (linéairement indépendantes) d'une même équation

$$(3) \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho(\alpha, \beta).$$

Si l'on représente par

$$(4) \quad ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2$$

⁽¹⁾ *Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. V, 1892).

⁽²⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII, p. 126.

l'élément linéaire des surfaces (2), on trouve aisément

$$(5) \quad \begin{cases} E_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_\alpha + M'^2_\alpha + N'^2_\alpha) - (LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha)^2, \\ -F_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'_\alpha L'_\beta + M'_\alpha M'_\beta + N'_\alpha N'_\beta) \\ \quad - (LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha)(LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta), \\ G_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_\beta + M'^2_\beta + N'^2_\beta) - (LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta)^2. \end{cases}$$

Nous allons former trois fonctions L, M, N vérifiant une équation (3), telles en outre que les relations (2) rentrent dans le type qui nous occupe et définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres. A cet effet, nous poserons

$$(6) \quad \begin{cases} 2L = i\sqrt{i} \left[(\alpha^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial \beta} \right], \\ 2M = \sqrt{i} \left[(\alpha^2 + 1) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + (\beta^2 + 1) \frac{\partial v}{\partial \beta} \right], \\ 2N = i\sqrt{i} \left(2\alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2\beta \frac{\partial v}{\partial \beta} \right), \end{cases}$$

en désignant par v la solution la plus générale de l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi'(\nu)}{(\alpha - \beta)^2},$$

où $\psi'(\nu)$ est la dérivée d'une fonction provisoirement indéterminée de ν . Moyennant l'hypothèse faite sur ν , on vérifie sans difficulté les relations

$$\frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi'(\nu)}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Je dis maintenant que, la fonction ψ une fois choisie, d'une manière quelconque d'ailleurs, toutes les surfaces correspondantes ont même élément linéaire. En effet, les formules (6) donnent immédiatement

$$(8) \quad L^2 + M^2 + N^2 = 2i\omega,$$

en introduisant la fonction auxiliaire

$$(9) \quad \omega = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta}.$$

Dès lors, on a sans calcul

$$(10) \quad \begin{cases} LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha = i \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}, \\ LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta = i \frac{\partial \varpi}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Différentiant les formules (6) en ayant égard à l'équation (7), on trouve après réductions

$$(11) \quad \begin{cases} L'_\alpha + M'_\alpha + N'_\alpha = i \left[(\alpha - \beta)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} + 2(\alpha - \beta) \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} - \left(\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \\ L'_\beta + M'_\beta + N'_\beta = i \left[(\alpha - \beta)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \beta^2} + 2(\beta - \alpha) \frac{\partial \nu}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} - \left(\frac{\partial \nu}{\partial \beta} \right)^2 \right], \\ L'_\alpha L'_\beta + M'_\alpha M'_\beta + N'_\alpha N'_\beta = i \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \beta^2} + \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] \\ \quad - i \left[(\alpha - \beta) \left(\frac{\partial \nu}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \frac{\partial \nu}{\partial \beta} \right]. \end{cases}$$

Au moyen des relations (8), (9), (10) et (11) on peut calculer les seconds membres des identités (5). Il convient, pour faire disparaître des résultats les trois dérivées secondes de ν , de les exprimer en fonction de $\psi'(\nu)$ et des deux dérivées premières de ϖ , ce que permettent les équations (7) et (9). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\varpi \left(\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \right)^2, \\ F_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + 2\varpi \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} \frac{\partial \nu}{\partial \beta}, \\ G_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right)^2 + 2\varpi \left(\frac{\partial \nu}{\partial \beta} \right)^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire $\varpi - \psi = u$ pour arriver à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi(\nu)] d\nu^2,$$

dont la forme montre que toutes les surfaces correspondant à une même fonction $\psi(\nu)$ sont applicables les unes sur les autres.

Enfin, il est bien évident que les différentielles (2) rentreront dans le type (1) défini par notre théorème, si l'intégrale générale ν de l'équation (7) admet la forme analytique des fonctions A_i et B_i . C'est ce qui aura lieu, d'après une théorie générale due

à M. Moutard, si l'on prend

$$\psi(v) = \frac{m(1-m)}{2} v^2, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

et aussi, en vertu d'une remarque faite par M. Weingarten, dans le cas où

$$\psi(v) = nv + pe^{\frac{2v}{n}},$$

quelles que soient les deux constantes arbitraires n et p . (On voit que, quand ψ est proportionnel à v^2 , les trois fonctions L , M et N sont des solutions de l'équation qui définit v).

4. *Second procédé.* — M. Darboux a montré ⁽¹⁾ que les coordonnées curvilignes u , v des points d'une surface d'élément linéaire

$$(4)' \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

sont définies comme fonctions des paramètres α et β des lignes asymptotiques par les deux équations suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(2H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + G \frac{\partial E}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \quad + \left(H^2 \frac{\partial \log k}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \quad + \left(2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \\ 2H^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(2H^2 \frac{\partial \log k}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} + F \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \quad + \left(H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \quad + \left(2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \end{array} \right.$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$H^2 = EG - F^2, \quad k = \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux.

Quand on a trouvé une solution (u, v) de ce système, on a vir-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 290.

tuellement déterminé une surface (à la position et à une symétrie près) qui admet l'élément linéaire considéré. Mais, pour connaître les différentielles de ses coordonnées, il faut encore intégrer deux équations de Riccati.

Examinons l'élément linéaire pour lequel on a

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2[u + \psi(v)]$$

et, par suite,

$$H^2 = G, \quad k = \frac{i}{G}.$$

Les équations générales (12) deviennent alors

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u + \psi)} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{u + \psi} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u + \psi)} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

Tel est le système que nous allons intégrer. Pour éliminer u , nous poserons

$$(15) \quad w = u + \psi(v).$$

L'équation (14) s'écrit alors

$$(14)' \quad w = \frac{\psi'}{2} \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v''_{\alpha\beta}},$$

et la précédente devient

$$(13)' \quad w \frac{\partial^2 \log w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - v'_\alpha v'_\beta + \frac{\psi'}{2} \left(v'_\alpha \frac{\partial \log w}{\partial \beta} + v'_\beta \frac{\partial \log w}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Si maintenant on élimine w entre ces deux équations, on trouve, tous calculs faits,

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = -2 \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)}.$$

De cette équation, intégrée par Liouville, on tire

$$(17) \quad \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = \frac{A'B'}{(A - B)^2},$$

en désignant par A et B deux fonctions arbitraires, l'une de α , l'autre de β . Ce résultat, rapproché des relations (14) et (15),

donne

$$(18) \quad w = u - \frac{1}{2} \psi(r) = \frac{1}{2} \frac{(A-B)^2}{A \cdot B} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Toutes les solutions du système (13) et (14) appartiennent donc au système (17) et (18). Pour établir la réciproque, remarquons que, si l'on pose

$$z = \frac{A \cdot B}{A - B^2},$$

d'où résultent, pour les équations (17) et (18), les formes suivantes

$$(17) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z^2 + 1,$$

$$(18) \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 1.$$

L'équation (18) est vérifiée d'elle-même. Quant à l'équation (17), il suffit d'y substituer les dérivées z_x, z_y, z_{xx} tirées de l'équation (18), en ayant égard à la relation (17), pour voir que son premier membre contient en facteur l'expression

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial x \partial y} - 1/z,$$

et les autres facteurs n'ont rien de zéro.

Ainsi nous avons vu, indépendamment de l'équation (17), ou de l'équation (18), que les courbes de genre 2 de période 2 qui possèdent une courbe de genre 1 comme courbe image

$$w = u - \frac{1}{2} \psi(r) = 0$$

sont les images des lignes isothermes des surfaces qui s'admettent comme courbes images les courbes de genre 1.

$$w = u - \frac{1}{2} \psi(r) = 0$$

On voit ainsi que toutes les courbes de genre 2 qui possèdent une courbe de genre 1 comme courbe image sont les images des courbes de genre 2 qui possèdent une courbe de genre 1 comme courbe image. On voit ainsi que toutes les courbes de genre 2 qui possèdent une courbe de genre 1 comme courbe image sont les images des courbes de genre 2 qui possèdent une courbe de genre 1 comme courbe image.

5. Il n'est peut-être pas sans intérêt de rapprocher les deux procédés que nous venons d'appliquer et de présenter quelques remarques sur leur mode d'emploi.

Revenons aux formules (2). Désignons par α et β deux fonctions arbitraires, l'une de α , l'autre de β , par a_n et b_n leurs dérivées respectives d'ordre n et supposons que L, M, N soient des fonctions connues des arguments

$$\alpha, \beta; a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$$

et de ceux-là seulement. Par hypothèse, tous les éléments linéaires

$$(4) \quad ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2,$$

qui diffèrent les uns des autres par le choix des fonctions α et β , peuvent être ramenés à la même forme

$$(4)' \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

où E, F, G sont des fonctions *déterminées* des deux variables indépendantes u et v . Laissant de côté le cas des surfaces à courbure totale constante, nous allons exprimer u et v en α et β .

Égalant les courbures totales des deux éléments linéaires (4) et (4)', nous aurons une première équation finie

$$(19) \quad \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}} = k(u, v) = \frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On en obtiendra une seconde en égalant l'un des paramètres différentiels de $k(u, v)$ au paramètre correspondant de $(L^2 + M^2 + N^2)^{-1}$. Cette seconde équation

$$(20) \quad \chi(u, v) = \chi_1(\alpha, \beta),$$

jointe à la précédente, déterminera les fonctions u et v , dont le calcul n'exigera aucune intégration.

Cette conclusion ne tombe en défaut que quand *tous* les paramètres différentiels de k sont des fonctions de k , c'est-à-dire dans le cas des surfaces de révolution. Mais alors l'élément linéaire (4) pouvant s'écrire

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

la formule connue

$$k = \sqrt{\frac{U''}{U}}$$

donnera u en fonction de k , et, par suite, de α et β . Pour déterminer v , il suffit de recourir à l'identité

$$\frac{\sqrt{ds^2 - du^2}}{U} = dv.$$

Ayant exprimé le premier membre en α et β , on sera ramené à l'intégration d'une différentielle exacte. Si l'on a égard à la relation (19), on voit que u dépend des mêmes arguments (sans plus) que L , M , N , et que les dérivées partielles v'_α , v'_β dépendent en outre des dérivées a_{n+1} et b_{n+1} .

6. Dans le cas général, il semble que le second membre de l'équation (20) contienne, d'après sa loi de formation, des dérivées a_r , b_r d'ordre supérieur à n , et que, par suite, l'une au moins des fonctions u et v dépende de ces dérivées d'ordre r . Nous allons montrer qu'il n'en est rien : *les seuls arguments dont puissent dépendre u et v sont ceux qui concourent à former L , M et N .*

En effet, d'après nos hypothèses, les coefficients E_1 , F_1 , G_1 de l'élément linéaire (4) ne contiennent les dérivées de a et b que jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement. Si donc r est supérieur à n , ils doivent être, en particulier, indépendants de a_{r+1} et de b_{r+1} . Supposons maintenant que l'on ait

$$u = u(a_r, b_r, \dots), \quad v = v(a_r, b_r, \dots).$$

Nous tirons de là

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} a_{r+1} + U_1 \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial b_r} b_{r+1} + U_2 \right) d\beta, \\ dv &= \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} a_{r+1} + V_1 \right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial b_r} b_{r+1} + V_2 \right) d\beta, \end{aligned}$$

les fonctions U_1 , U_2 , V_1 , V_2 ne dépendant ni de a_{r+1} , ni de b_{r+1} . Substituons ces différentielles dans l'élément linéaire (4)' et exprimons qu'il est indépendant de a_{r+1} et de b_{r+1} , en nous souvenant que E , F et G n'en dépendent pas. Le coefficient E_1 est un trinôme du second degré en a_{r+1} ; d'où les deux équations

$$\begin{cases} E \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^2 = 0, \\ EU_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \left(V_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} + U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + GV_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0. \end{cases}$$

Le coefficient F_1 est bilinéaire en a_{r+1} et b_{r+1} ; d'où les trois équations

$$\begin{cases} E \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} + \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0, \\ EU_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \left(V_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} + U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + GV_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \\ EU_1 \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(V_1 \frac{\partial u}{\partial b_r} + U_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} \right) + GV_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0. \end{cases}$$

Le coefficient G_1 est un trinôme du second degré en b_{r+1} ; d'où les deux équations

$$\begin{cases} E \left(\frac{\partial u}{\partial b_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial b_r} \right)^2 = 0, \\ EU_2 \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(V_2 \frac{\partial u}{\partial b_r} + U_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} \right) + GV_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0. \end{cases}$$

Des sept équations ci-dessus, détachons la première de chaque groupe. Nous obtenons trois relations linéaires et homogènes en E, F, G , dont le déterminant est

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} - \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^3.$$

Ce déterminant doit être nul.

Soit d'abord $\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial u}{\partial b_r} \neq 0$. On aura

$$\frac{\partial v}{\partial a_r} = \lambda \frac{\partial u}{\partial a_r}, \quad \frac{\partial v}{\partial b_r} = \lambda \frac{\partial u}{\partial b_r}.$$

Les trois équations considérées se réduisent à une, savoir

$$E + 2F\lambda + G\lambda^2 = 0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$\begin{aligned} U_1(E + \lambda F) + V_1(F + \lambda G) &= 0, \\ U_2(E + \lambda F) + V_2(F + \lambda G) &= 0, \end{aligned}$$

qui, rapprochées de la précédente, ainsi écrite,

$$(E + \lambda F) + \lambda(F + \lambda G) = 0,$$

entraînent

$$V_1 = \lambda U_1, \quad V_2 = \lambda U_2,$$

et, par suite,

$$dv = \lambda du.$$

Ainsi v serait fonction de u , ce qui ne se peut.

Soit maintenant $\frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, avec $\frac{\partial u}{\partial a_r} \neq 0$, ce qui exige $\frac{\partial v}{\partial b_r} = 0$.

Les trois équations considérées se réduisent à une

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^2 = 0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$U_1 \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + V_1 \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0,$$

$$U_2 \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + V_2 \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0.$$

Rapprochons de chacune d'elles la précédente, ainsi écrite,

$$\frac{\partial u}{\partial a_r} \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + \frac{\partial v}{\partial a_r} \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0;$$

nous trouvons immédiatement

$$U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} - V_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} - V_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} = 0.$$

On en conclut

$$U_1 = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial a_r}, \quad U_2 = \mu_2 \frac{\partial u}{\partial a_r},$$

$$V_1 = \mu_1 \frac{\partial v}{\partial a_r}, \quad V_2 = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial a_r}.$$

De là résulte

$$du = \frac{\partial u}{\partial a_r} [(a_{r+1} + \mu_1) dx + \mu_2 d\beta],$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial a_r} [(a_{r+1} + \mu_1) dx + \mu_2 d\beta].$$

Ainsi v serait fonction de u ou se réduirait à une constante, conclusions également inacceptables.

Supposons enfin $\frac{\partial u}{\partial a_r} = \frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, c'est-à-dire u indépendant de a_r et de b_r . Les trois équations considérées se réduisent à deux

$$G \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad G \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0.$$

On voit que, si G n'est pas nul, v devra, comme u , être indépendant de a_r et de b_r .

Si $G = 0$, les quatre équations restantes deviennent

$$U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad U_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

abstraction faite du facteur F , que l'on ne peut supposer nul sans réduire l'élément linéaire à un carré parfait. Or U_1 et U_2 ne peuvent pas être nuls tous les deux, car alors u serait constant. On a donc

$$\frac{\partial v}{\partial a_r} = \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

ce qui montre que v est indépendant de a_r et de b_r .

7. D'après la proposition que nous venons d'établir, si les dérivées de l'ordre le plus élevé de a et de b qui figurent dans L , M et N sont celles de l'ordre n , les fonctions u et v ne contiendront pas de dérivée d'ordre plus élevé. Mais il peut arriver que l'une d'elles ne dépende ni de a_n , ni de b_n , ou que chacune d'elles ne dépende que de l'une de ces deux dérivées.

Pour étudier ces cas particuliers, revenons aux équations (12), que nous écrirons ainsi :

$$(12)' \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + P \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + Q \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + R \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + P_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + Q_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + R_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

ce qui définit suffisamment la signification des lettres P , Q , R , P_1 , Q_1 et R_1 . Je dis que *si les dérivées de u ou de v manquent dans l'une de ces équations, l'élément linéaire (4)' convient à des surfaces réglées.*

Supposons, par exemple, les coefficients P_1 et Q_1 nuls, ce qui entraîne les deux équations

$$(P_1) \quad 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} = 0,$$

$$(Q_1) \quad H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

La première peut s'écrire

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{E}}.$$

On en déduit

$$\sqrt{E} = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{F}{\sqrt{E}} = \frac{\partial t}{\partial v},$$

en introduisant une fonction auxiliaire t de u et de v . Alors l'élément linéaire proposé

$$(4') \quad ds^2 = \left(\sqrt{E} du + \frac{F}{\sqrt{E}} dv \right)^2 + \frac{H^2}{E} dv^2$$

prend la forme

$$ds^2 = dt^2 + \frac{H^2}{E} dv^2.$$

Or, en éliminant la dérivée E_v entre les équations (P_1) et (Q_1) , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{k H^2}{E} = 0, \quad \frac{H^2}{E} = \frac{V(v)}{k},$$

ce qui permet d'écrire

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dv^2}{k},$$

résultat strictement équivalent à la forme canonique

$$ds^2 = dt^2 + (lt^2 + mt + n) dv^2$$

de l'élément linéaire des surfaces réglées. En effet, pour le type

$$ds^2 = dt^2 + C^2 dv^2,$$

le paramètre k est déterminé par la relation connue

$$k^2 = \frac{C_{t^2}''}{C}.$$

Dans l'exemple actuel, k^2 est égal à C^{-4} . On a donc

$$CC_{t^2}'' = \frac{1}{C^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C^2}{\partial t^2} = CC_{t^2}'' + C_{t^2}'^2 = C_{t^2}'^2 + \frac{1}{C^2}.$$

Différentions par rapport à t ; nous trouvons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 C^2}{\partial t^3} = 2 C_{t^2}' \left(C_{t^2}'' - \frac{1}{C^3} \right) = 0.$$

Ainsi C^2 est bien un trinôme du second degré en t , ce qui démontre la proposition. (A suivre.)

**SUR LES FORMES BINAIRES DONT LES VARIABLES SONT DES INTÉGRALES
FONDAMENTALES
D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE;**

Par M. PAUL VERNIER.

Dans la théorie des intégrales algébriques des équations linéaires du second ordre, on peut faire jouer un rôle considérable au théorème suivant :

THÉOREME. — *Si une forme binaire dont les deux variables sont deux intégrales fondamentales de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ est égale à une racine d'une fonction rationnelle de x , elle renferme, à une même puissance, tous les facteurs linéaires, qui forment un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par l'un de ses facteurs linéaires.*

J'indiquerai ici une démonstration très simple de ce théorème.

1. Établissons d'abord un lemme.

Soit $f(y_1, y_2)$ une fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ degré des deux variables y_1 et y_2 . Si l'on pose

$$(1) \quad f''_{y_1} f''_{y_1} - f''_{y_1 y_1} \equiv H(f),$$

la fonction $H(f)$ est le hessien de la forme f ; c'est une fonction homogène de degré $2(m-2)$ par rapport aux mêmes variables. Lorsque y_1 et y_2 sont deux intégrales distinctes $y_1(x)$, $y_2(x)$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$, les deux formes binaires f et $H(f)$ sont deux fonctions de x , dont la seconde peut s'exprimer explicitement au moyen de la première. Posons, pour le démontrer, $f(y_1, y_2) = X$, en désignant par X une fonction explicite de la variable x .

Nous aurons

$$(2) \quad y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} \equiv mX,$$

$$(A) \quad y_1^2 f''_{y_1} + 2y_1 y_2 f''_{y_1 y_2} + y_2^2 f''_{y_2} \equiv m(m-1)X$$

et, d'autre part, en désignant les dérivées par des accents,

$$(3) \quad f'_{y_1} y'_1 + f'_{y_2} y'_2 = X'.$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres des équations (2) et (3), en traitant la forme f comme fonction composée et en remplaçant y'_1, y'_2 par leurs valeurs Py_1, Py_2 , nous obtenons les égalités suivantes :

$$(B) \quad y_1 y'_1 f''_{y_1} + (y_1 y'_2 + y_2 y'_1) f''_{y_1 y_2} + y_2 y'_2 f''_{y_2} \equiv (m-1)X',$$

$$(C) \quad y_1^2 f''_{y_1} + 2 y'_1 y_2 f''_{y_1 y_2} + y_2^2 f''_{y_2} \equiv X' - m P X.$$

Or, si je considère la forme quadratique binaire

$$(f''_{y_1}, f''_{y_1 y_2}, f''_{y_2}),$$

et que je désigne par (A, B, C) la transformée qu'on en déduit par la substitution $\begin{bmatrix} y_1 & y'_1 \\ y_2 & y'_2 \end{bmatrix}$ dont le déterminant est une constante b , on reconnaît immédiatement que les éléments A, B, C de la nouvelle forme sont identiquement les premiers membres des équations (A), (B), (C); on a donc

$$B^2 - AC = (m-1)^2 X'^2 - m(m-1)X(X' - m P X),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$B^2 - AC = b^2 (f''_{y_1 y_2} - f''_{y_1} f''_{y_2}) = -b^2 H(f).$$

De là, en posant, pour abréger,

$$(4) \quad T = \frac{X'}{mX} = \frac{1}{m} \frac{d \log X}{dx},$$

on conclut

$$(5) \quad b^2 H(f) \equiv m^2 (m-1) X^2 \left(\frac{dT}{dx} + T^2 - P \right).$$

2. Il résulte immédiatement de cette formule que si la forme $f(y_1, y_2)$ est égale à la racine d'une fonction rationnelle de x , son covariant $H(f)$ jouit de la même propriété. En effet, si X est racine d'une fonction rationnelle, sa dérivée logarithmique $\frac{X'}{X}$ est une fonction rationnelle; le facteur $\frac{dT}{dx} + T^2 - P$ est donc aussi une fonction rationnelle et le produit de ce facteur par X^2 est, aussi bien que X , la racine d'une fonction rationnelle; il est même rationnel, lorsque X est la racine carrée d'une fonction rationnelle.

Or, lorsqu'une forme est égale à la racine d'une fonction rationnelle, les diverses substitutions linéaires qui correspondent aux divers contours que la variable peut décrire dans le plan en revenant au même point la laissent identique à elle-même, à un facteur constant près. Supposons en effet que, par suite d'un contour fermé, décrit par la variable, les deux intégrales fondamentales y_1, y_2 soient remplacées par les deux fonctions linéaires

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \quad \gamma y_1 + \delta y_2$$

et désignons par $f_1(y_1, y_2)$ la fonction en laquelle se trouve changée par cette substitution la racine primitive $f(y_1, y_2)$. Si cette forme est égale à la racine X d'une fonction rationnelle, comme cette fonction X se change en elle-même, multipliée par une racine de l'unité, lorsque la variable revient au même point, après avoir décrit un contour dans le plan, il doit en être de même de $f(y_1, y_2)$, de sorte qu'on a, et cela *identiquement*,

$$f_1(y_1, y_2) = r f(y_1, y_2),$$

en désignant par r une racine de l'unité.

Ainsi, les substitutions linéaires qui correspondent aux divers circuits par lesquels la variable peut revenir au même point n'ont d'autre effet que de multiplier la forme $f(y_1, y_2)$ par une racine de l'unité. Il résulte de là que les facteurs linéaires de cette forme ne font que s'échanger entre eux, à un facteur constant près, lorsque la variable décrit un contour fermé; d'où il résulte que si cette forme renferme une puissance de degré λ d'un facteur linéaire, elle renferme aussi les puissances du même degré de tous les facteurs linéaires qui composent un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par le facteur linéaire considéré. Car, si l'on fait décrire à la variable le circuit par lequel ce facteur linéaire se change en un autre facteur de cette équation, la forme transformée renfermera la puissance du degré λ de ce facteur, et, comme elle ne diffère que par un facteur constant de la forme primitive, celle-ci renferme aussi comme facteur la même puissance de ce facteur.

La proposition annoncée est donc démontrée.

SUR LES MOUVEMENTS ET LES TRAJECTOIRES RÉELS DES SYSTÈMES;

Par M. PAUL PAINLEVÉ.

L'étude des trajectoires réelles d'un système soumis à des forces données rentre dans la théorie des courbes définies par les équations différentielles. On connaît les travaux considérables de M. Poincaré sur le sujet; les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard comportent également d'importantes applications à cette théorie. C'est à un point de vue assez différent que je me place pour étudier *le mouvement et les trajectoires réels d'un système matériel (S) à liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps*. Le principal résultat que j'indiquerai ici n'est qu'une première application (dans le domaine *réel*) de la méthode que j'ai employée pour discuter les singularités essentielles d'une équation différentielle quelconque ⁽¹⁾.

Dans l'étude du mouvement de (S), étude qui revient à l'intégration d'un système d'équations de Lagrange, on peut se trouver en effet arrêté pour des raisons très différentes. Si, à l'instant t_1 , le système atteint une position déterminée (S_0) avec des vitesses déterminées, il n'y a aucune difficulté à poursuivre la détermination du mouvement, pourvu que la position (S_0) soit *régulière* : j'entends par là que, dans le voisinage de (S_0), les coefficients des équations de Lagrange sont des fonctions régulières des paramètres $q_1, \dots, q_k$, qui définissent la position de (S). Quand (S_0) est une position *singulière*, il faut avoir recours aux travaux de M. Poincaré et de M. Picard sur les intégrales des équations différentielles qui répondent à des conditions initiales singulières. Mais une difficulté d'un tout autre ordre provient de ce fait que, t tendant vers t_1 , la position de (S) ou ses vitesses peuvent ne pas tendre vers une limite; autrement dit, les fonctions $q_i(t)$ et $q'_i(t)$ peuvent devenir indéterminées pour $t = t_1$, et cela sans que rien le fasse prévoir sur les équations différentielles.

La proposition que j'ai en vue s'énonce ainsi : *Si, t tendant vers t_1 , (S) tend vers une position régulière, ses vitesses tendent*

⁽¹⁾ Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1893).

respectivement vers une limite finie. De plus, si, t croissant indéfiniment, (S) tend vers une position régulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre, et toutes les vitesses tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

D'après cela, si pour $t = t_1$ le mouvement cesse d'être régulier, c'est que (S) ou bien atteint une position singulière, ou bien ne tend vers aucune position limite quand t tend vers t_1 . Cette dernière singularité peut d'ailleurs se présenter : il arrive que les fonctions $q_i(t)$ deviennent indéterminées pour des valeurs réelles de t , variables avec les constantes. Toutefois, cela n'a jamais lieu quand certaines conditions sont remplies ; mais c'est là un point qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

Le théorème que je viens de citer, joint à des considérations tout élémentaires, entraîne quelques conséquences au sujet des trajectoires réelles. Voici les plus importantes. Regardons les variables réelles $q_1, \dots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace à k dimensions ; soit E_k un domaine de cet espace où les coefficients des équations de Lagrange sont holomorphes, et soit (C) ou $[q_i = \varphi_i(q_1), i = 2, \dots, k]$ un fragment de trajectoire contenu dans E_k . En chaque point M de (C), la force vive T de (S) a une valeur bien déterminée ; une trajectoire ne comporte donc que deux mouvements *distincts*, différant seulement par le sens, mouvements réels si T est positif, imaginaires si T est négatif. Mais les mouvements imaginaires deviennent réels (et réciproquement) quand on change t en it ou, ce qui revient au même, quand on change le sens de toutes les forces appliquées au système. En appelant mouvement *conjugué* du mouvement *vrai* le mouvement de (S) qui correspond aux nouvelles forces, on voit que les trajectoires réelles se divisent naturellement en *trajectoires vraies* et *trajectoires conjuguées*. Il existe un faisceau à k paramètres de trajectoires pour lesquelles T s'annule au moins en un point M' (qui n'est pas un point d'équilibre) ; en ces points, dits *points d'arrêt*, le système rétrograde sur la trajectoire, qui est alors formée de segments alternativement vrais ou conjugués, séparés par les points M' ; nous la nommons *trajectoire mixte*.

Il peut exister toutefois (mais il n'existe pas en général) des trajectoires exceptionnelles qui comportent une infinité de mouve-

ments; ces trajectoires sont nécessairement des *géodésiques* de T , et elles dépendent au plus de $(k - 1)$ paramètres. Elles seront dites *trajectoires remarquables*. Quand elles dépendent précisément de $(k - 1)$ paramètres, elles se confondent avec le faisceau des trajectoires mixtes dont le nombre de paramètres s'abaisse d'une unité.

Ces définitions adoptées, soit M un point de E_k ; *par ce point passent une infinité de trajectoires réelles* (C) *tangentes à une direction quelconque donnée et qui dépendent d'une constante arbitraire; ces trajectoires sont toutes des courbes analytiques régulières dans le voisinage de* M . Elles comprennent un faisceau à un paramètre de trajectoires *mixtes* présentant dans E_k un point d'arrêt, une trajectoire (C_1) (et une seule) pour laquelle M est un point d'arrêt. Cette trajectoire se réduit à un point si M correspond à une position d'équilibre de (S) . Enfin, quand par un point M passe une trajectoire *remarquable*, elle se confond avec (C_1) ; si toutes les trajectoires (C_1) sont remarquables, elles se confondent dans E_k avec les trajectoires mixtes.

Il ne passe pas par le point M *d'autres trajectoires, si le point* M *n'est pas une position d'équilibre*. Cette proposition peut paraître évidente au premier examen; en réalité, elle n'est exacte qu'en vertu du théorème énoncé tout à l'heure, et elle se trouve en défaut *pour les points d'équilibre*. Par un point d'équilibre M , il peut passer, en outre du faisceau régulier de trajectoires, des branches *SINGULIÈRES* de trajectoires (C) , qui présentent au point M des singularités de nature quelconque, par exemple n'ont pas de tangente; si *voisin qu'on prenne* M' *de* M , *l'arc* MM' *de* (C) *n'est parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué*. En général, le système (S) tend sur (C) vers la position M quand t croît indéfiniment, dans l'un des deux mouvements vrai ou conjugué. Il arrive aussi que M est sur (C) un point limite d'une suite de points d'arrêt $M_1, M_2, \dots$; la branche MM' se décompose alors en une infinité de segments $M_1M_2, M_2M_3, \dots$ qui correspondent à autant de mouvements périodiques de (S) , alternativement vrais et conjugués. Enfin, il peut exister sur (C) une infinité de points d'équilibre (de l'une ou l'autre des espèces précédentes) formant

des suites dont le point d'équilibre considéré M soit un point limite.

Tout fragment MM' de trajectoire, intérieur à E_k , qui ne comprend pas de branche singulière, notamment tout fragment qui ne passe pas par un point d'équilibre, est parcouru tout entier en un temps fini dans le même sens, d'un mouvement soit vrai, soit conjugué; toutefois, dans le cas exceptionnel où (C) est une trajectoire mixte, MM' se décompose en un nombre *fini* de segments jouissant de cette propriété; si MM' appartient à une trajectoire remarquable, il est parcouru tout entier dans le même sens d'une infinité de manières, mais un point quelconque de MM' est point d'arrêt pour d'autres mouvements.

Quand les forces dérivent d'un potentiel, tout segment MM' (intérieur à E_k) d'une trajectoire prise au hasard, est parcouru entièrement en un temps fini, dans le mouvement vrai ou conjugué. Il n'y a d'exception que pour des faisceaux particuliers de trajectoires.

Tels sont les principaux résultats qui seront développés dans ce Mémoire. Je commencerai par établir quelques propositions bien simples concernant les équations différentielles des trajectoires.

NOMBRE DES CONSTANTES DONT DÉPENDENT LES TRAJECTOIRES.

Considérons un système (S) à liaisons indépendantes du temps, et soumis à des forces également indépendantes du temps, mais que nous ne supposons pas encore indépendantes des vitesses. Le mouvement de ce système est déterminé par les équations de Lagrange

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \\ (i = 1, 2, \dots, k), \end{array} \right.$$

où

$$2T = \sum q'_i q'_j A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_k) \equiv \frac{ds^2}{dt^2}, \quad (A_{ij} \equiv A_{ji}),$$

et où le discriminant Δ de la forme quadratique T n'est pas identiquement nul.

Soient $t_0, q_2^0, \dots, q_k^0, q_1'^0, q_2'^0, \dots, q_k'^0$ les valeurs de $t, q_2, \dots, q_k,$

$q'_1, q'_2, \dots, q_k$, pour une valeur donnée de q_1 , soit $q_1 = 0$; les équations (1) définissent $q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k$ en fonction de $t - t_0$ et des $(2k - 1)$ constantes arbitraires $q_2^0, q_3^0, \dots, q_k^0, q'_1^0, \dots, q'_k^0$. Exprimons $q_2, \dots, q_k$ en fonction de q_1 en éliminant t , et convenons de dire que les relations $q_2 = \varphi_2(q_1), \dots, q_k = \varphi_k(q_1)$ ainsi obtenues définissent les *trajectoires* du système. Il est clair que ces trajectoires dépendent au plus de $(2k - 1)$ constantes, à savoir $q_2^0, \dots, q_k^0, q'_1^0, \dots, q'_k^0$; d'autre part, elles dépendent au moins de $(2k - 2)$ constantes distinctes, puisque, pour q_1 donné, $q_2, \dots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \dots, \frac{dq_k}{dq_1}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. Il est bien facile de voir qu'en général le nombre v des constantes distinctes dont dépendent les trajectoires est égal à $2k - 1$, et de trouver à quelles conditions ce nombre se réduit à $2k - 2$.

Résolvons en effet les équations (1) par rapport aux q''_i . Si α_i représente ce que devient le discriminant Δ quand on y remplace les éléments de la première colonne par $Q_1, \dots, Q_k$; enfin, si P_i représente une certaine forme quadratique par rapport aux q'_i , on peut écrire

$$(2) \quad q''_i = P_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = P_i + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Nous avons d'autre part

$$q''_i = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} q_1'^2 + \frac{dq_i}{dq_1} q'_1''$$

et par suite

$$(3) \quad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = \frac{\left(P_i - \frac{dq_i}{dq_1} P_1\right) - \left(\beta_i - \frac{dq_i}{dq_1} \beta_1\right)}{q_1'^2}, \quad (i = 2, 3, \dots, k).$$

Dans ce qui va suivre, nous représenterons par $q'_{(i)}, q''_{(i)}, \dots$ les dérivées $\frac{dq_i}{dq_1}, \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}, \dots$, et par Π_i ce que devient P_i quand on y remplace q'_1 par 1, q'_2 par $q'_{(2)}, \dots, q'_k$ par $q'_{(k)}$. L'équation (3) devient ainsi

$$(4) \quad q''_{(i)} = \Pi_i - q'_{(i)} \Pi_1 + \frac{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1}{q_1'^2} \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

les β_i étant des fonctions de $q_1, \dots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}$.

Deux cas sont alors à distinguer : si le second membre de toutes les équations (4) est indépendant de q'_1 , le système (4) forme un système de $(k-1)$ équations du second ordre portant sur les k variables $q_1, q_2, \dots, q_k$, et ces équations définissent $q_2, q_3, \dots, q_k$ en fonction de q_1 et des $(2k-2)$ constantes arbitraires $q_2^0, \dots, q_k^0, q_{(2)}^0, \dots, q_{(k)}^0$. Si au contraire q'_1 figure dans une au moins des équations (4), soit dans la première, on peut disposer de q_1^0 pour que q_2^0 ait une valeur arbitraire (en même temps que $q_2^0, \dots, q_k^0, q_{(2)}^0, \dots, q_{(k)}^0$) et les fonctions $q_2, \dots, q_k$ de q_1 dépendent de $(2k-1)$ constantes arbitraires.

Pour que les seconds membres des équations (4) soient indépendants de q'_1 , et par suite que $\nu = 2k-2$, il faut et il suffit évidemment que les $(k-1)$ expressions $q'_1 \beta_i - q'_i \beta_1$ soient homogènes et du troisième degré par rapport aux q'_i . Si l'on désigne par a_{ij} le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij} , on a d'ailleurs

$$(5) \quad \beta_i = \frac{1}{\Delta} (a_{i1} Q_1 + a_{i2} Q_2 + \dots + a_{ik} Q_k),$$

et inversement

$$(6) \quad Q_i = A_{i1} \beta_1 + A_{i2} \beta_2 + \dots + A_{ik} \beta_k.$$

Le nombre ν sera en particulier égal à $(2k-2)$ si tous les coefficients Q_i sont homogènes et du second degré par rapport aux vitesses.

Quand les Q_i ne dépendent pas des vitesses, il en est de même des β_i ; pour que ν soit égal à $2k-2$, il faut donc et il suffit que les expressions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i$ soient identiquement nulles, ce qui entraîne

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \dots \equiv \beta_k \equiv 0,$$

et par suite

$$Q_1 \equiv Q_2 \equiv \dots \equiv Q_k \equiv 0.$$

Les trajectoires sont alors les *géodésiques* du ds^2 .

Un cas remarquable est celui où, les forces dépendant des vitesses, les trajectoires du système coïncident avec les géodésiques du ds^2 . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $(k-1)$ conditions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i \equiv 0$ soient remplies, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\beta_1}{q'_1} = \frac{\beta_2}{q'_2} = \dots = \frac{\beta_k}{q'_k} = \lambda,$$

•

ou encore, d'après (6),

$$(7) \quad Q_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad Q_2 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \quad \dots, \quad Q_k = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_k},$$

λ désignant une fonction quelconque de q_i, q'_i .

Pour que les trajectoires de (1) coïncident avec les géodésiques de ds^2 , il faut donc et il suffit que $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ soient proportionnels à $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q'_k}$.

Quand ces conditions sont remplies, les trajectoires (qui sont les géodésiques) une fois obtenues, il reste à intégrer une équation différentielle du premier ordre pour obtenir $\frac{dt}{dq_1}$; t est donné ensuite par une quadrature. Dans le cas où λ est homogène et du premier degré par rapport aux q'_i ,

$$\lambda = q'_1 f(q_1, \dots, q_k, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}),$$

le théorème des forces vives donne aussitôt

$$dT = 2fT dq_1,$$

d'où, en intégrant,

$$T = e^{2 \int f(q_1, \dots, q_k, \frac{dq_1}{dq_1}, \dots, \frac{dq_k}{dq_1}) dq_1};$$

t s'obtient ainsi à l'aide de deux quadratures.

Il est facile d'interpréter, dans des cas particuliers intéressants, ces conditions (7). Si, par exemple, le système (S) se réduit à un point libre M, ces conditions expriment que la force F qui s'exerce sur M a constamment même ligne d'action que la vitesse de M. Si le système (S) est formé de points matériels libres M_i de masse m_i , les conditions (7) expriment que la force (F_i) qui s'exerce sur chaque point M_i a pour ligne d'action la vitesse v_i de M_i , et que de plus les forces F_i sont entre elles comme les quantités de mouvement $m_i v_i$, $\frac{F_1}{m_1 v_1} = \frac{F_i}{m_i v_i}$. Enfin, dans le cas du mouvement d'un point sur une surface, les conditions (7) expriment que la projection (sur le plan tangent à la surface) de la force donnée est constamment dirigée selon la vitesse du point : c'est ce qui arrive

quand un point est mobile avec frottement sur une surface dans un milieu résistant.

Sans insister davantage sur ces applications faciles, je vais me placer désormais dans l'hypothèse où les forces Q_i ne dépendent pas des vitesses.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES TRAJECTOIRES. — MOUVEMENTS POSSIBLES SUR UNE TRAJECTOIRE. — TRAJECTOIRES REMARQUABLES.

Les trajectoires $q_i = \varphi_i(q_1)$ définies par le système

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \dots, q_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

dépendent de $(2k - 1)$ constantes à moins que tous les Q_i ne soient nuls.

Quand tous les Q_i sont nuls, les trajectoires dépendent de $(2k - 2)$ paramètres et sont données, comme on sait, par le système

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial f}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

si l'on pose

$$f^2 = \sum A_{ij} q'_{(i)} q'_{(j)} = \frac{ds^2}{dq_1^2}, \quad \left(q'_{(1)} = 1, \quad q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1} \right).$$

Le mouvement sur chaque *géodésique* est défini par l'égalité

$$T = h,$$

où h est une constante arbitraire, et qui donne t par la quadrature

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \int f dq_1.$$

On voit que sur la même trajectoire une infinité de mouvements *distincts* sont possibles; nous ne regardons pas comme *distincts* deux mouvements qui se déduisent l'un de l'autre en augmentant t d'une constante.

Je ne dirai rien de plus, pour l'instant, sur ce cas particulier. J'aborde immédiatement le cas général où les Q_i ne sont pas tous nuls.

Formons, dans ce cas, les équations différentielles des trajectoires; nous avons déjà obtenu le système

$$(a) \quad \frac{q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1} = \frac{q''_{(2)} + q'_{(2)} \Pi_1 - \Pi_2}{\beta_2 - q'_{(2)} \beta_1}, \quad (i = 3, 4, \dots, k),$$

la valeur commune de ces rapports étant $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$.

D'autre part, posons

$$\psi_i = \beta_i - q'_{(i)} \beta_1, \quad \chi_i = q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i,$$

et différencions par rapport à q_1 l'égalité

$$q'^2_1 = \frac{\beta_2 - q'_{(2)} \beta_1}{q''_{(2)} + q'_{(2)} \Pi_1 - \Pi_2} = \frac{\psi_2}{\chi_2},$$

en remarquant que $\frac{d}{dq_1} q'^2_1 = 2 q''_1 = 2 \left(\Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi_2} + \beta_1 \right)$; il vient

$$(b) \quad \frac{d}{dq_1} \frac{\psi_2}{\chi_2} = 2 \Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi_2} + 2 \beta_1,$$

égalité de la forme

$$q'''_{(2)} = \frac{-3 q''_{(2)} + q'_{(2)} M_2 + M_3}{M_0 - q'_{(2)}},$$

où M_2 et M_3 désignent des polynômes du troisième et du cinquième degré en $q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}$, et M_0 une simple fonction des q_i .

J'ai indiqué dans un autre travail (voir le *Journal de Mathématiques*, 1894) quelques propriétés du système différentiel (a) et (b) qui définit les trajectoires. Je me bornerai à rappeler ici que les équations des géodésiques de T s'obtiennent en égalant à zéro les numérateurs χ_i des rapports (a); il suit de là que les géodésiques de T font partie des trajectoires; en effet, elles satisfont aux équations (a), et comme l'équation (b) peut s'écrire

$$\frac{d\chi_2}{dq_1} = \chi_2 N,$$

elles vérifient aussi cette équation. Les géodésiques de T forment donc, quels que soient les Q_i , un faisceau de trajectoires à 2 ($k - 1$) paramètres.

Détermination du temps. — Quand le système (a), (b) est in-

tégré, on connaît $q_2, \dots, q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires; le temps t est alors donné par une quelconque des égalités

$$(c) \quad dt = dq_1 \sqrt{\frac{\gamma_i}{\psi_i}} = dq_1 \sqrt{\frac{q_{(i)}'' + q_{(i)}' \Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q_{(i)}' \beta_1}},$$

c'est-à-dire par une quadrature.

On voit qu'une *trajectoire ne comporte que deux mouvements distincts* ⁽¹⁾, qui se déduisent l'un de l'autre en changeant t en $-t$. En particulier, si cette trajectoire est une géodésique quelconque, on trouve $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, $t = t_0$. Inversement, si l'on a $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, tous les γ_i sont nuls et la trajectoire est une géodésique.

Quand on connaît une trajectoire particulière, le mouvement sur cette trajectoire est défini par la simple quadrature (c).

Trajectoires remarquables. — Il peut exister toutefois des trajectoires exceptionnelles, que nous appellerons *trajectoires remarquables*, pour lesquelles les conclusions précédentes sont en défaut; ce sont les trajectoires qui donnent à tous les rapports $\frac{\gamma_i}{\psi_i}$ la forme $\frac{0}{0}$, autrement dit qui satisfont à la fois à toutes les égalités

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_k = 0$$

et

$$(d) \quad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \frac{dq_3}{\beta_3} = \dots = \frac{dq_k}{\beta_k}.$$

Les trajectoires remarquables seront donc les géodésiques (s'il en existe) qui vérifient les équations (d).

En général, ces conditions sont incompatibles; dans tous les cas, d'après (d), *les trajectoires remarquables ne peuvent dépendre de plus de $(k-1)$ constantes.*

Sur une trajectoire remarquable, une infinité de mouvements distincts sont possibles. En effet, il est loisible de remplacer les

(1) Cette proposition subsiste quand les Q_i renferment les q_i' ; si le nombre ν des constantes qui figurent dans les trajectoires est égal à $2k-2$, chaque trajectoire comporte une infinité de mouvements; si $\nu = 2k-1$, chaque trajectoire (à part des trajectoires exceptionnelles) ne comporte que deux mouvements qui ne diffèrent que par le signe de t .

équations du mouvement par les équations (3)

$$(3) \quad 0 = q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i + \frac{\beta_1 q'_{(i)} - \beta_i}{q_i'^2} = \gamma_i - \frac{\psi_i}{q_i'^2}, \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

jointes à une des équations de Lagrange ou, si l'on veut, à l'égalité des forces vives

$$dT = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_k dq_k.$$

Par hypothèse, la trajectoire considérée, satisfaisant aux équations $\gamma_i = 0$, $\psi_i = 0$, satisfait aux équations (3); le mouvement sur cette trajectoire est donc défini par la seule égalité

$$T = q_1'^2 f[q_1, \dots, q_k, 1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}] = \int [Q_1 + Q_2 q'_{(2)} + \dots + Q_k q'_{(k)}] dq_1,$$

ou encore

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1) + h}};$$

$\frac{dt}{dq_1}$ dépend donc d'une constante h ⁽¹⁾.

Le mouvement du système (S) sur une trajectoire remarquable est celui d'un système à liaisons complètes; les points matériels d'un tel système ne parcourent qu'une trajectoire, mais peuvent la parcourir d'une infinité de manières.

Exemple. — Comme application, prenons l'exemple d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force F ou (X, Y, Z) . Quelles seront les trajectoires remarquables de M? Ce seront les droites D (s'il en existe) telles qu'en tout point (x, y, z) de D la force (F) ait D pour ligne d'action. A quelles conditions ces trajectoires dépendront-elles de $k - 1 = 2$ paramètres? Les droites D forment alors une congruence; par un point (x, y, z) quelconque passe une trajectoire D, et tout le long de D la force F est dirigée suivant cette droite. L'ensemble des lignes d'action de F, qui, en général, constitue un *complexe*, doit donc se réduire à une *congruence*; inversement, quand cette condition est remplie, toutes

(1) Il n'y aurait d'exception que si $f(q_1)$ était identiquement nul, c'est-à-dire si la géodésique satisfaisait à l'équation $ds^2 = 0$. Il est clair qu'elle ne pourrait correspondre alors à un déplacement réel des points du système matériel. C'est là un point sur lequel nous reviendrons tout à l'heure.

les droites de la congruence sont des trajectoires remarquables. Si notamment F dérive d'un potentiel U , la condition exprime que les surfaces de niveau sont *parallèles*. Le cas où F est une force centrale ou parallèle à une direction fixe sont des cas simples où la condition est remplie.

Remarque. — Il convient de faire au sujet de cet exemple une remarque d'une portée générale. Ne considérons que les valeurs réelles de x, y, z ; si X, Y, Z sont des fonctions *analytiques* de ces variables, holomorphes pour toutes les valeurs réelles de ces variables, il est clair qu'un segment de droite D ne peut être trajectoire remarquable sans que la droite tout entière jouisse de cette propriété; il est clair également que si les forces forment une congruence dans une certaine portion de l'espace, elles forment une congruence dans tout l'espace. Ceci est encore vrai quand les fonctions X, Y, Z présentent des points singuliers pourvu que ces points ne forment pas de surfaces séparant l'espace réel en parties distinctes.

Mais quand les fonctions X, Y, Z ne sont pas analytiques, ou quand, étant analytiques, elles présentent des surfaces coupures séparant l'espace en plusieurs parties, il n'en est plus ainsi en général. Il peut se faire qu'un segment seulement de droite soit trajectoire remarquable, et aussi que pour les points x, y, z d'un certain volume les forces F forment une congruence tout en formant un complexe pour les points d'un autre volume (¹).

C'est ce qui a lieu, par exemple, si le point M est soumis, à l'intérieur d'une sphère Σ de centre O et de rayon 1 , à la force centrale $X = x, Y = y, Z = z$, et à l'extérieur de Σ à la force $X = x - (r - 1)^2, Y = y, Z = z, (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$: chaque *diamètre* O de la sphère Σ est une trajectoire remarquable et peut être parcouru par le mobile d'une infinité de façons, mais quand le mobile sort de la sphère il quitte la droite D pour suivre une trajectoire tangente à la droite et d'autant plus voisine de D que sa vitesse de sortie est plus grande.

(¹) Quand les fonctions X, Y, Z sont à plusieurs valeurs, il peut se faire que, pour le même volume, les forces forment une congruence si l'on choisit une certaine détermination des X, Y, Z , et un complexe si l'on choisit une autre détermination.

Pour échapper à toute objection, il faut donc énoncer ainsi la condition trouvée tout à l'heure :

Soit V une portion d'espace où les X, Y, Z ont une valeur bien déterminée; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V , c'est que les forces F (*relatives aux différents points de V*) forment une congruence; ou encore, s'il existe une fonction de force, que les surfaces de niveau contenues dans V soient parallèles.

La même observation s'applique à un système (S) quelconque, mais il sera plus commode de la développer après avoir fixé la terminologie que nous emploierons dans l'étude des trajectoires réelles que nous allons aborder maintenant.

TRAJECTOIRES RÉELLES ET MOUVEMENT RÉEL.

Choix des paramètres. Définitions. — Il est toujours loisible de choisir les paramètres indépendants $q_1, q_2, \dots, q_k$ qui définissent la position d'un système (S) de façon que pour toute position réelle à distance finie du système les $q_1, \dots, q_k$ aient une valeur unique, réelle et finie. Il suffit, en effet, x_j, y_j, z_j étant les coordonnées d'un point matériel M_j de (S) , de choisir, comme paramètres, k de ces coordonnées qui soient indépendantes.

Nous regarderons, dans ce qui va suivre, $q_1, q_2, \dots, q_k$ comme les k coordonnées rectangulaires d'un espace à k dimensions; quand (S) occupe toutes les positions réelles possibles, le point M ou $(q_1, q_2, \dots, q_k)$, qui lui correspond dans cet espace, varie dans un certain domaine réel E_k qui ne comprend pas nécessairement tout l'espace. C'est ce domaine E_k , où à tout point M correspond une position réelle du système, que nous prendrons exclusivement comme champ des variables $q_1, q_2, \dots, q_k$.

La position et la vitesse de chaque point M_j déterminant sans ambiguïté la force vive $2T$, chaque position réelle de (S) définit une valeur réelle et une seule des coefficients A_{ij} . Mais au point M de E_k peuvent correspondre plusieurs positions de (S) ; les coefficients A_{ij} forment alors un système multiforme de fonctions réelles définies dans E_k ; à chaque point M de E_k et à une détermination arbitrairement choisie des A_{ij} correspond une position réelle de (S) et une seule.

La même remarque s'applique aux coefficients

$$Q_i = \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_i},$$

quand les forces données X_j , Y_j , Z_j sont définies sans ambiguïté pour chaque position réelle du système : c'est ce qui a toujours lieu dans les applications. S'il en était autrement, observons seulement qu'il faudrait fixer celle des déterminations X_j , Y_j , Z_j qu'on choisit au début du mouvement, afin que les conditions mécaniques initiales du problème fussent pleinement déterminées.

Nous supposons que les diverses valeurs des A_{ij} , Q_i définissent dans E_k autant de fonctions uniformes continues admettant des dérivées premières et secondes continues ⁽¹⁾, sauf en certains points N de E_k que nous appelons *points singuliers* de E_k . En un point N une au moins des fonctions A_{ij} , Q_i ou de leurs dérivées est discontinue, ou bien deux de ces déterminations deviennent égales. Ces points N , dans le cas le plus défavorable, forment une surface à $(k-1)$ dimensions dans E_k , soit $\psi(q_1, q_2, \dots, q_k) = 0$; la surface qui limite E_k en fait partie, quand E_k n'embrasse pas tout l'espace.

J'ajoute que, les paramètres q_i étant convenablement choisis, le discriminant Δ de T ne s'annule pas dans E_k . Autrement les $\frac{\partial T}{\partial q_i}$, et par suite T , s'annuleraient en un point M de E_k et pour des valeurs réelles des q_i ; à M correspond une position réelle du système et aux q'_i des valeurs *réelles* des x'_j , y'_j , z'_j , qui ne sont pas toutes nulles si q_1 , par exemple, coïncide avec x_j . La somme $\sum m_j (x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2)$ serait donc nulle pour des valeurs réelles des x' , y' , z' différentes de zéro, ce qui est absurde ⁽²⁾.

En définitive, le mouvement de (S) sera défini par les équations

$$(2) \quad q_i'' = P_i + \beta_i \equiv \sum_{r,s} \lambda_{r,s}^i(q_1, \dots, q_k) q'_r q'_s + \beta_i(q_1, \dots, q_k),$$

où les $\lambda_{r,s}^i$, et les β_i sont des fonctions réelles (à une ou plusieurs

⁽¹⁾ Il suffit même que les Q_i admettent des dérivées premières continues.

⁽²⁾ Ceci est encore vrai évidemment si S est un système *continu* qui dépend de k paramètres.

déterminations) continues dans E_k ainsi que leurs dérivées premières, sauf en des points singuliers N .

Dans les applications, les diverses valeurs des A_{ij} , Q_i , par suite les $\lambda_{r,i}^i$, β_i sont des fonctions analytiques holomorphes de $q_1, q_2, \dots, q_k$, sauf en certains points N' de E_k que nous appellerons *points analytiquement singuliers* ⁽¹⁾. Il arrive que ces points N' forment des surfaces décomposant E_k en volumes distincts $E'_k, E''_k, \dots$; nous disons alors que les fonctions A_{ij} , Q_i présentent (dans E_k) des coupures *fermées*; en particulier, quand les A_{ij} , Q_i sont multiformes, il peut se faire que dans le même volume E'_k deux déterminations d'un de ces coefficients soient deux fonctions analytiques différentes.

Dans tous les cas, si l'on place le système S dans des conditions mécaniques initiales arbitrairement choisies, les valeurs correspondantes des $q_i - q'_i$ ainsi que les valeurs initiales des A_{ij} , L_i sont déterminées sans ambiguïté, et quand le point M ou $(q_1, \dots, q_k)$ varie (dans E_k) d'une manière continue, il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des A_{ij} , L_i , tant que M ne passe pas par un point singulier N .

J'ajoute que plusieurs des restrictions précédentes ne sont nullement essentielles. Quand on assujettit seulement T à la condition que Δ ne soit pas identiquement nul, et quand on embrasse tout le champ réel E_k où les A_{ij} , Q_i restent réels, tout ce que nous allons dire subsiste, pourvu toutefois qu'on ajoute aux points singuliers N les points de E_k où Δ s'annule.

Précisons maintenant quelques définitions relatives aux courbes (C) [ou $q_i = \varphi_i(q_1)$, $i = 2, 3, \dots, k$] de l'espace E_k . Soit d'abord $k = 2$; si la courbe (C) , ou $q_2 = \varphi_2(q_1)$, admet dans le voisinage de M_0 une tangente continue, on peut rapporter q_2 et q_1 à l'arc σ compté à partir de M_0 positivement dans un sens déterminé. Quand σ croît par exemple à partir de 0, à chaque valeur de σ correspond un point M de (C) et un seul, tant que σ n'atteint pas une certaine limite σ_1 , qui peut être infinie. Pour $\sigma_1 = \infty$, deux hypothèses sont possibles; quand σ croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucun point M_1 à distance finie, ou bien M tend vers une position limite M_1 . Quand σ_1 est fini, M tend sûrement vers

⁽¹⁾ Tous les points N sont des points N' , mais la réciproque n'est pas vraie.

un point M_1 (¹). Dans ces deux derniers cas, nous dirons que la courbe (C) passe par M_1 , mais il convient de remarquer que M_1 peut être un point singulier de nature quelconque, notamment un point *asymptote* de C.

Ces remarques s'étendent aussitôt à un espace E_k quelconque. Si les $(k-1)$ fonctions $q_i = \varphi_i(q_1)$ qui définissent (C) admettent dans le voisinage de q_1^0 des dérivées premières continues, posons (suivant la terminologie adoptée)

$$d\sigma^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_k^2,$$

et appelons longueur de l'arc M_1M de (C) l'intégrale curviligne

$$\sigma = \int_{M_1}^M d\sigma, \text{ effectuée le long de (C).}$$

Quand on rapporte $q_1, \dots, q_k$ à σ (compté positivement à partir de M_0 dans un sens déterminé), à chaque valeur de σ correspond un point M et un seul, tant que σ n'atteint pas une certaine limite σ_1 (qui peut être infinie). Si M tend vers une position limite M_1 , quand σ tend vers σ_1 (ce qui a toujours lieu quand σ_1 est fini) on dit que la courbe (C) passe par M_1 . Cette définition revient à la suivante : (C) passe par le point M_1 ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, si chacune de ses projections $q_i = \varphi_i(q_1)$ sur le plan des q_1, q_i passe par le point a_1, a_i .

La tangente à (C) au point M_0 sera la droite

$$\frac{q_1 - q_1^0}{\left(\frac{dq_1}{d\sigma}\right)_0} = \frac{q_2 - q_2^0}{\left(\frac{dq_2}{d\sigma}\right)_0} = \dots = \frac{q_k - q_k^0}{\left(\frac{dq_k}{d\sigma}\right)_0},$$

dont les cosinus directeurs sont $\left(\frac{dq_i}{d\sigma}\right)_0$. Si $q_1, q_2, \dots, q_k$ sont fonctions de t , la vitesse sera le segment qui a comme projections sur $Oq_1, \dots, Oq_k$ les valeurs $q'_1(t), \dots, q'_k(t)$, segment dirigé selon la tangente et dont la longueur est $\frac{d\sigma}{dt}$. La courbure sera l'expression

$$\sqrt{\sum \left(\frac{d^2 q_i}{d\sigma^2}\right)^2}.$$

(¹) D'une façon précise, on entend par là que, ε étant donné à l'avance aussi petit qu'on veut, on peut déterminer α de façon que la distance MM_1 reste moindre que ε quand σ varie de $\sigma_1 - \alpha$ à σ_1 (ou, dans le cas de σ_1 infini, quand σ croît à partir de α).

Un arc de courbe M_0M_1 de (C) sera dit *régulier*, si, en chaque point M de cet arc (les extrémités comprises), (C) admet une *tangente* continue. Analytiquement, cela signifie que les q_i étant rapportés à l'arc, soit $q_i = \psi_i(\sigma)$, le point M parcourt M_0M_1 quand σ varie entre deux limites finies σ_0 et σ_1 , et que les fonctions $\psi_i(\sigma)$ admettent des dérivées premières continues entre σ_0 et σ_1 (les valeurs extrêmes comprises).

Si (C) est une courbe analytique, les ψ_i sont des fonctions analytiques de σ . L'arc M_0M_1 de (C) sera dit *analytiquement régulier* si pour toute valeur de σ ($\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$) les fonctions ψ_i sont *holomorphes*.

Cette terminologie adoptée, revenons au mouvement réel d'un système (S). Partons d'un point M_0 de E_k avec une valeur particulière des A_{ij} , Q_i , et considérons autour de M_0 un *volume* V_k de E_k à l'intérieur duquel les déterminations choisies pour les A_{ij} , Q_i soient *régulières*, j'entends restent uniformes et continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Il suffit pour cela que V_k ne renferme aucun des *points singuliers* N.

Les coefficients $\lambda_{r,s}^i$, β_i des équations (2) ont ainsi dans V_k une valeur unique.

Si M_0 ou $(q_1^0, \dots, q_k^0)$ est la position de M au temps t_0 , et v_0 ou $(q_1'^0, \dots, q_k'^0)$ sa vitesse initiale, les équations

$$(2) \quad q_i'' = P_i + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

définissent un mouvement et un seul, par suite une trajectoire et une seule, répondant à ces conditions initiales. On voit que par M_0 passent une infinité de trajectoires tangentes en ce point; la valeur absolue v_0 de la vitesse initiale permet de disposer arbitrairement de la courbure en M_1 de ces trajectoires. Par M_0 passe une géodésique et une seule tangente en M_0 à une droite donnée.

Qu'arrive-t-il quand la vitesse v_0 croît indéfiniment, sa direction restant invariable? Si l'on prend q_1 comme variable indépendante, les équations (2) deviennent, en posant $q_1' = \frac{1}{r_1}$,

$$(2)' \quad \begin{cases} \frac{dt}{dq_1} = r_1, & \frac{dr_1}{dq_1} = -r_1 \Pi_1 - r_1^3 \beta_1, \\ \frac{dq_i}{dq_1} = q_i', & \frac{dq_i'}{dq_1} = \Pi_i - q_i' \Pi_1 + (\beta_i - q_i' \beta_1) r_1^3, \quad (i = 2, 3, \dots, k). \end{cases}$$

Ces équations admettent un système d'intégrales, et un seul, tel qu'on ait, pour $q_i = q_i^0$,

$$t = t_0, \quad r_1 = r_1^0, \quad q_i = q_i^0, \quad q'_i = q'_{(i)};$$

ces intégrales varient avec r_1^0 d'une manière continue, et pour $r_1^0 = 0$ sont de la forme

$$t = t_0, \quad r_1 = 0, \quad q_1 = \varphi_i(q_i), \quad q'_i = \varphi'_i(q_i),$$

la courbe $q_i = \varphi_i(q_i)$ étant la géodésique tangente à la direction (v_0) . Cette géodésique est donc la limite des trajectoires (C) quand v_0 croît indéfiniment.

Lorsqu'en M_0 tous les β_i s'annulent, et que de plus v_0 est aussi nul, les intégrales du mouvement sont simplement

$$q_1 = q_1^0, \quad q_2 = q_2^0, \quad \dots \quad q_k = q_k^0;$$

le point M reste en équilibre, la trajectoire se réduit au point M_0 . Nous appelons *points d'équilibre* les points P de E_k où tous les β_i sont nuls; les conditions $\beta_i = 0$ équivalent d'ailleurs aux conditions $Q_i = 0$, puisque Δ ne s'annule pas dans E_k . Les points P sont en général des points isolés; dans des cas particuliers, ils peuvent former des lignes, et même des surfaces à $(k-1)$ dimensions $\chi(q_1, \dots, q_k) = 0$ dans E_k .

Tout cela suppose seulement que M_0 ne soit pas un point singulier N des déterminations A_{ij} , Q_i considérées. Si M_0 coïncidait avec un tel point N, il faudrait avoir recours en général aux procédés de discussion de M. Poincaré. Observons toutefois qu'il y a lieu de distinguer ces points N en deux catégories : les points singuliers *parasites* qui tiennent au choix des paramètres q_i et qu'on fait disparaître en changeant de paramètres, en prenant par exemple comme variables k autres coordonnées parmi les x_j , y_j , z_j ; et les points singuliers *intrinsèques* qui subsistent quels que soient les paramètres choisis parmi les x_j , y_j , z_j . Par exemple, s'il s'agit d'un point mobile sur une surface $F(x, y, z) = 0$, et si l'on prend comme paramètres x et y , les points où le plan tangent est parallèle à Oz sont des points singuliers N, mais on élimine la singularité en prenant comme coordonnées x et z (ou y et z), pour étudier le mouvement dans le voisinage d'un tel point N, à

moins que N ne soit un point multiple de la surface; dans ce dernier cas seulement N est un point singulier intrinsèque. Il est clair que les points singuliers *intrinsèques* sont les seuls qui donnent lieu à des difficultés sérieuses, puisqu'un changement bien simple de paramètres fait disparaître les autres points N.

J'arrive maintenant aux propositions que j'ai en vue concernant les trajectoires et le mouvement réel.

Retour sur les trajectoires remarquables. — Je reviendrai d'abord un instant sur les trajectoires remarquables; sur une telle trajectoire (γ), le mouvement est défini par l'égalité

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1) + h}},$$

où $f(q_1) \equiv T(q_1, \dots, q_k, 1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)})$ est toujours positif, puisque T est positif en tout point M de E_k pour des valeurs réelles des q' qui ne sont pas toutes nulles. On peut, d'autre part, disposer de la constante h de façon que $\varphi(q_1) + h$ soit positif dans le voisinage d'un point arbitraire M de (γ), en sorte qu'une infinité de mouvements réels sont possibles sur (γ).

Par un point M du volume V_k de E_k considéré plus haut (où les A_{ij} , Q_i sont bien déterminés et réguliers), passe une courbe et une seule satisfaisant aux conditions

$$(d) \quad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \dots = \frac{dq_k}{\beta_k},$$

pourvu que M ne soit pas un point d'équilibre.

Par un point arbitraire M de V_k passe donc au plus une trajectoire remarquable.

Pour qu'un point quelconque de V_k appartienne à une trajectoire remarquable, il faut et il suffit que toutes les courbes définies par (d) soient des géodésiques. On peut donner à ce théorème une forme un peu différente : soit (G) la géodésique tangente en M au segment $\beta_1, \dots, \beta_k$; l'ensemble des courbes (G) relatives aux différents points M de E_k dépend en général de k constantes distinctes. Pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V_k , il faut et il suffit que l'ensemble (G) ne dépende que de $(k - 1)$ paramètres.

Quand les coefficients A_{ij} , Q_i sont (dans E_k) des fonctions ana-

lytiques sans coupure fermée, la condition ne peut être vérifiée pour une portion finie de V_k sans être vérifiée dans tout le domaine E_k . Mais quand les fonctions A_{ij} , Q_i ne sont pas analytiques ou présentent des coupures fermées, un volume V_k peut se décomposer en volumes de deux espèces V'_k , V''_k : par un point quelconque des V'_k il passe une trajectoire remarquable, au lieu qu'il n'en passe aucune par un point *arbitraire* de V''_k . Nous avons cité un exemple de ce fait (voir p. 147).

MOUVEMENTS RÉELS SUR UNE TRAJECTOIRE QUELCONQUE.

MOUVEMENTS VRAIS. MOUVEMENTS CONJUGUÉS.

Sur une trajectoire réelle quelconque, le mouvement est défini par une des égalités

$$(c) \quad \frac{dt}{dq_1} = \sqrt{\frac{q''_{(i)} + \Pi_1 q'_{(i)} - \Pi_t}{\beta_t - q'_{(i)} \beta_1}} \equiv \sqrt{\frac{\gamma_t}{\psi_t}}.$$

Si le long du segment $M_0 M_1$, d'une trajectoire réelle (C), la valeur commune des rapports $\frac{\gamma_t}{\psi_t}$ est positive, l'arc $M_0 M_1$ est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement réel, et nous dirons que c'est une trajectoire *vraie*. Si la même expression $\frac{\gamma_t}{\psi_t}$ est négative, le mouvement est imaginaire; il devient réel quand on change t en it dans les équations (1), ce qui ne modifie pas les trajectoires; les nouvelles équations (1) sont alors celles du système (S) sous l'action des mêmes forces (F) dont on a seulement changé le sens. Nous donnerons à ce second mouvement le nom de mouvement *conjugué* du mouvement *vrai*, et nous dirons que l'arc $M_0 M_1$ est une trajectoire conjugquée. On voit que les trajectoires réelles (C) se divisent ainsi en deux classes : les trajectoires *vraies* (C'), et les trajectoires *conjuguées* (C'') qui sont les trajectoires vraies de (S) quand on change le *sens* des forces.

Pour pousser plus loin l'étude de ces trajectoires, nous établirons une importante propriété du mouvement réel.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ DU MOUVEMENT RÉEL.

Plaçons le système dans une position initiale *régulière* M_0 avec

des vitesses données, et étudions le mouvement quand t croît ⁽¹⁾ à partir de t_0 . Nous dirons que le mouvement reste *régulier* entre t_0 et t_1 si, quand t varie de t_0 à t_1 , le système occupe à chaque instant une position déterminée à distance finie avec des vitesses déterminées sans passer jamais par une position singulière N.

D'après le théorème fondamental sur les équations différentielles, les intégrales $q_i(t)$ du mouvement qui correspondent aux conditions initiales $q_i^0, \dot{q}_i^0$, sont continues, et admettent des dérivées premières continues tant que $|t - t_0|$ reste inférieur à une certaine limite; le mouvement reste donc à coup sûr régulier dans un intervalle de temps fini. Admettons qu'il reste régulier tant que t n'a pas atteint ou dépassé la valeur t' . Quand t tend vers t' , une au moins des trois circonstances suivantes doit se présenter : ou bien (S) *ne tend vers aucune position limite à distance finie*, ou bien (S) *tend vers une position singulière*; ou bien enfin (S) *tend vers une position régulière, mais les vitesses $\dot{q}_i$ ne tendent pas vers des limites finies*. Autrement, en effet, (S) atteindrait à l'instant t' une position régulière avec des vitesses déterminées, et, d'après le théorème invoqué, le mouvement se poursuivrait régulièrement au delà de t' . — La proposition que nous voulons démontrer, c'est que la troisième circonstance ne saurait se réaliser. Autrement dit, *quand t tendant vers t' , le système (S) tend vers une position régulière, les vitesses $\dot{q}_i$ de (S) tendent vers des limites finies et le mouvement reste régulier à l'instant t' et au delà*.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le théorème fondamental de la théorie des équations tel que l'énonce M. Picard ⁽²⁾.

Soit M ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ un point de E_k dans le voisinage duquel les déterminations choisies pour les A_{ij}, Q_i sont *régulières* (au sens que nous avons défini); les seconds membres des équations

$$(2) \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i, \quad \frac{d\dot{q}_i}{dt} = P_i + \dot{P}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(1) Il suffit de faire croître t , car les équations (1) ne changent pas quand on change t en $-t$.

(2) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. XI, p. 308.

seront continus ainsi que leurs dérivées premières et moindres en module qu'une certaine limite M tant que les q_i, q'_i satisferont aux inégalités

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad |q'_i| \leq L, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

δ est un certain nombre positif, L un nombre positif choisi arbitrairement, et que nous prenons seulement supérieur à δ .

D'après cela, soit $q_i^0, q_i'^0$ un système de valeurs satisfaisant aux conditions

$$|q_i^0 - a_i| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |q_i'^0| \leq \frac{L}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Pour toutes les valeurs q_i, q'_i telles qu'on ait

$$|q_i - q_i^0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |q'_i - q_i'^0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

les seconds membres de (2) restent en module moindres que M . D'après le théorème invoqué, le système d'intégrales $q_i(t), q'_i(t)$ qui, pour $t = t_0$ prennent les valeurs $q_i^0, q_i'^0$, est un système de fonctions de t bien déterminées et continues au moins dans l'intervalle $t_0 - \frac{\delta}{2M}$ à $t_0 + \frac{\delta}{2M}$.

Voyons, d'autre part, ce qui se passe pour des vitesses initiales très grandes (en valeur absolue). Prenons comme variable indépendante un des paramètres q choisi de façon que sa dérivée $\left(\frac{dq}{dt}\right)_0$ ne soit en module inférieure à aucune des autres dérivées $q_i'^0$; soit q_1 ce paramètre. Le système (2) devient le système

$$(2)' \quad \begin{cases} \frac{dt}{dq_1} = r_1, & \frac{dr_1}{dq_1} = -r_1 \Pi_1 - r_1^3 \beta_1, \\ \frac{dq_i}{dq_1} = q'_i, & \frac{dq'_i}{dq_1} = \Pi_i - q'_i \Pi_1 + (\beta_i - q'_i \beta_1) r_1^2. \end{cases}$$

Soit M_1 le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad |r_1| \leq L_1, \quad |q'_i| \leq 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(L_1 étant toujours une quantité quelconque supérieure à δ). Soient, d'autre part, des valeurs $q_i^0, r_1^0, q_i'^0$ satisfaisant aux con-

ditions

$$|q_i^0 - a_i| \leq \frac{\delta}{2}, \quad r_1^0 \leq \frac{L_1}{2}, \quad |q'_{(i)}| \leq 1;$$

il existe un système d'intégrales et un seul $t(q_1)$, $r_1(q_1)$, $q_i(q_1)$, $q'_{(i)}(q_1)$ qui prennent pour $q_1 = q_1^0$ les valeurs t_0 , r_1^0 , q_i^0 , $q'_{(i)}^0$, et ces intégrales sont continues au moins dans l'intervalle de $q_1^0 - \varepsilon_1$ à $q_1^0 + \varepsilon_1$, en appelant ε_1 la quantité $\frac{\delta}{2M_1}$.

En particulier, si $r_1^0 = 0$, ce système est de la forme

$$t \equiv t_0, \quad r_1 \equiv 0, \quad q_i \equiv \varphi_i(q_1), \quad q'_{(i)} \equiv \varphi'_{(i)}(q_1).$$

Ceci nous montre que, dans l'intervalle de $q_1^0 - \varepsilon_1$ à $q_1^0 + \varepsilon_1$, r_1 ne s'annule jamais à moins d'être identiquement nul; t varie donc constamment dans le même sens quand q_1 croît de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, et passe de la valeur $t_0 - \tau_1$ à la valeur $t_0 + \tau'_1$ (ou de la valeur $t_0 + \tau'_1$ à la valeur $t_0 - \tau_1$). Il suit de là que $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$ sont des fonctions de t continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle de $t_0 - \tau_1$ à $t_0 + \tau'_1$, et que q_1 passe d'une des valeurs $q_1^0 \pm \varepsilon$ à l'autre quand t varie dans cet intervalle.

Le même raisonnement peut se répéter si la variable indépendante est un autre paramètre q_j . Aux équations (2') correspondent des équations analogues; soit M_j le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad \left| \frac{dt}{dq_j} \right| \leq L_1, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_j} \right| \leq 1 + \frac{\delta}{2};$$

à la quantité $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2M_1}$ correspond la quantité $\varepsilon_j = \frac{\delta}{2M_j}$; j'appellerai ε la plus petite des quantités ε_j .

Nous sommes dès lors en état de démontrer la proposition que nous avons énoncée. Admettons, en effet, que, t tendant vers t' , (S) tende vers une position non singulière $a_1, a_2, \dots, a_k$; de deux choses l'une: ou bien les q'_i tendront vers zéro (auquel cas le théorème est démontré), ou bien l'un au moins des q'_i , pour certaines valeurs de t aussi voisines qu'on veut de t' , est supérieur en module à une certaine limite fixe λ . Considérons alors le

nombre ε introduit plus haut et qui correspond aux conditions

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad \left| \frac{dt}{dq_j} \right| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_j} \right| \leq 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

($\frac{1}{\lambda}$ remplace L_1). Nous pouvons, par hypothèse, trouver un instant t_1 assez voisin de t pour que, t variant de t_1 à t' , chaque variable q_i reste comprise entre $q_i - \alpha$ et $q_i + \alpha$; α désigne un nombre quelconque qu'on a choisi inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant t_0 une valeur de t comprise entre t' et t_1 et pour laquelle le plus grand des modules $|q'_i|$, soit $|q'_1|$, dépasse λ . On a, pour $t = t_0$,

$$|q_1^0 - a_1| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \left| \frac{dt}{dq_1} \right|_0 < \frac{1}{\lambda}, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_1} \right|_0 \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

quand q_1 varie de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, t varie de $t_0 - \eta$ à $t_0 + \eta'$ (ou de $t_0 + \eta'$ à $t_0 - \eta$); je dis que t' est compris entre t_0 et $t_0 + \eta'$. Autrement, t variant de t_0 à $t_0 + \eta'$, par suite entre t_1 et t' , q_1 varierait de q_1^0 à $q_1^0 \pm \varepsilon$; mais, entre t' et t , on a

$$|q_1 - a_1| \leq \alpha < \frac{\varepsilon}{2};$$

deux valeurs de q_1 dans cet intervalle ne peuvent donc différer de ε . L'instant t' est nécessairement compris entre t_0 et $t_0 + \eta'$, et comme, dans cet intervalle, les fonctions $q_i(t)$, $q'_i(t)$ sont continues, le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t' .

C. Q. F. D.

Dans ce qui précède, nous avons supposé t' fini. Admettons maintenant que, t croissant indéfiniment à partir de t_0 , le mouvement reste régulier; trois hypothèses sont possibles : ou bien, t croissant indéfiniment, (S) ne tend vers aucune position limite à distance finie ⁽¹⁾; ou bien (S) tend vers une position singulière; ou enfin (S) tend vers une position M ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ non singulière. Je vais montrer que, dans ce dernier cas, cette position M

(1) (S) peut s'éloigner indéfiniment, ou sa position peut être indéterminée quand t tend vers ∞ .

est nécessairement une position d'équilibre P et de plus que les q'_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Tout d'abord les vitesses tendent vers zéro; admettons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et répétons le raisonnement fait plus haut en gardant la même notation; par hypothèse, pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite t_1 , on a

$$|q_i - a_i| \leq \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k):$$

mais, d'autre part, il existe des valeurs t_0 de t plus grandes que t_1 et telles que l'un au moins des paramètres, q_i par exemple, varie de ε quand t passe de t_0 à $t_0 + \tau_1'$. Il y a donc contradiction; les q'_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

D'autre part, la position limite $a_1, a_2, \dots, a_k$ est une position d'équilibre du système (S). Changeons, en effet, t en $\frac{1}{\theta}$; les équations (2) deviennent

$$\frac{dq_i}{d\theta} = -\frac{q'_i}{\theta^2}, \quad \frac{dq'_i}{d\theta} = -\frac{\beta_i + \Pi_i}{\theta^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Par hypothèse, quand θ tend vers zéro, les $q_i, \dots, q_k$ tendent vers $a_1, a_2, \dots, a_k$ et les q'_i vers zéro; il suit de là que $\beta_i(a_1, \dots, a_k)$ est nul; car soit $\beta_i(a_1, \dots, a_k) = \beta_i^0 \neq 0$, on aurait

$$\frac{dq'_i}{d\theta} = -\frac{\beta_i^0 + \delta'_i}{\theta^2},$$

δ'_i tendant vers zéro avec θ , et q'_i croîtrait indéfiniment quand θ tendrait vers zéro. Il faut donc que $\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_k^0$ soient nuls.

Inversement⁽¹⁾ d'ailleurs, si le système (S) tend vers une position régulière d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, avec une force vive qui tend vers zéro, quand t tend vers une certaine limite t' , cette limite est forcément l'infini; car si t' était fini, le mouvement répondrait pour $t = t'$ aux conditions initiales $q_i = a_i, q'_i = 0$; or (P étant une position d'équilibre) le système unique d'intégrales définies par ces conditions initiales est le système $q_i \equiv a_i$.

(¹) Cette réciproque, comme la proposition même, n'est plus exacte si la position P est intrinsèquement singulière.

Nous pouvons en définitive énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Si, quand t tend vers t' , le système (S) tend vers une position non singulière, les vitesses tendent vers une limite finie (*) et le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t' .*

Si, quand t croît indéfiniment, le système (S) tend vers une position limite non singulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre et les vitesses de (S) tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Inversement, si (S) tend vers une position (régulière) d'équilibre avec une force vive qui tend vers zéro, ce ne peut être que pour t croissant (ou décroissant) indéfiniment.

APPLICATION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT A L'ÉTUDE DES TRAJECTOIRES.

Tangente à une trajectoire. Courbure. — Supposons qu'à l'instant t_1 le point M de E_k qui définit la position de (S) arrive en un point M_1 ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ non singulier; sa vitesse est nécessairement déterminée et finie, mais deux cas sont à distinguer, suivant qu'elle est ou non différente de zéro. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas qui est le cas général.

Un au moins des q'_i , soit q'_1 , est alors différent de zéro à l'instant t_1 . Le mouvement est défini par les égalités

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 + b_1(t - t_1) + \dots & (b_1 \neq 0), \\ q_2 &= a_2 + b_2(t - t_1) + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La trajectoire (C) de M se poursuit au delà de M_1 , et admet

(*) Lorsque les fonctions A_{ij} , Q_i sont analytiques, on démontre de la même manière cette proposition plus générale : si, quand la variable imaginaire t tend vers t' suivant une certaine loi continue, les q_i tendent vers des valeurs $a_1, \dots, a_k$ qui ne sont pas des valeurs *singulières*, les q'_i tendent nécessairement vers des limites finies. Ce n'est là qu'un cas particulier d'un important théorème qui concerne toutes les équations

$$q'_i = F_i(t, q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k) \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

où F_i est algébrique par rapport aux q'_i : ce théorème sera développé dans un Mémoire consacré aux équations différentielles.

en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue dont les cosinus directeurs sont proportionnels à 1, $\frac{q'_2}{q'_1}$, ..., $\frac{q'_k}{q'_1}$.*

De plus, les égalités

$$q'_{(i)} = \Pi_i - \frac{q'_i}{q'_1} \Pi_1 + \frac{\beta_i - \frac{q'_i}{q'_1} \beta_1}{q'^2_1}, \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

montrent que la trajectoire admet en M_1 et dans le voisinage *une courbure continue* ⁽¹⁾. Cette courbure varie pour les diverses trajectoires tangentes en M_1 à la même droite avec q'_1 , à moins toutefois que la tangente n'ait précisément pour direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$; les trajectoires (en particulier la géodésique) tangentes à cette droite ont même courbure, du moins toutes celles qui correspondent à une vitesse en M_1 différente de zéro.

Inversement, donnons-nous en M_1 *la tangente et la courbure* d'une trajectoire (C). Les rapports $\frac{q'_i}{q'_1} = q'_{(i)}$ sont déterminés; d'autre part, R désignant le rayon de courbure, on a

$$\frac{1}{R^2} = \sum \frac{\left[q'_{(i)} \Pi_j - q'_{(j)} \Pi_i + \frac{\beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}}{q'^2_1} \right]^2}{[\sum q'^2_{(i)}]^2},$$

d'où deux valeurs pour q'^2_1 et, par suite, deux trajectoires (C_1) et (C_2) , pourvu seulement que toutes les quantités $\beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}$ ne soient pas nulles, c'est-à-dire que la tangente n'ait pas comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Mais à quelles conditions ces trajectoires (C_1) et (C_2) seront-elles réelles? Si l'on pose

$$A_r = \beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}, \quad B_r = \Pi_j q'_{(i)} - \Pi_i q'_{(j)} \quad \text{et} \quad \rho^2 = \frac{[\sum q'^2_{(i)}]^2}{R^2},$$

il faut que les deux valeurs de q'^2_1 soient réelles, et, par suite, qu'on ait

$$(\sum A_r B_r)^2 + \sum A_r^2 (\rho^2 - \sum B_r^2) \geq 0,$$

ou bien

$$\rho^2 \geq \frac{\sum (A_r B_s - A_s B_r)^2}{\sum A_r^2}.$$

Quand cette condition est remplie, les trajectoires (C_1) et (C_2)

⁽¹⁾ Si M_1 est un point *analytiquement régulier* des A_{ij} , Q_i , la trajectoire est une courbe analytique régulière dans le voisinage de M_1 .

sont réelles. Si, de plus, ρ^2 est supérieur à ΣB_r^2 , l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Pour $\rho^2 = \Sigma B_r^2$, une des trajectoires est une géodésique, l'autre une trajectoire vraie ou conjuguée suivant que $\Sigma A_r B_r$ est positif ou négatif. Pour $\rho^2 < \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux vraies ou conjuguées, suivant le signe de $\Sigma A_r B_r$. Quand $\Sigma A_r B_r$ est nul, ρ^2 est nécessairement plus grand que ΣB_r^2 ; pour $\rho^2 = \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) se confondent avec la géodésique.

D'où cette conclusion : V_k désignant un domaine de E_k où les A_{ij} , Q_i sont uniformes et réguliers, par un point M_1 de V_k passent deux trajectoires réelles (C_1) et (C_2) ayant en M_1 une tangente $M_1 T$ et une courbure $\frac{1}{R}$ données, pourvu que la courbure soit supérieure à une certaine limite L . Soit de plus $\frac{1}{R_1}$ la courbure de la géodésique (G) tangente en M_1 à $M_1 T$ ($\frac{1}{R_1} > L$) : si $\frac{1}{R}$ est supérieur à $\frac{1}{R_1}$, les trajectoires (C_1) et (C_2) sont l'une vraie, l'autre conjuguée; si $\frac{1}{R}$ est égal à $\frac{1}{R_1}$, une de ces trajectoires est la géodésique (G) ; si $\frac{1}{R}$ est inférieur à $\frac{1}{R_1}$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux vraies ou toutes deux conjuguées suivant que la seconde trajectoire de courbure $\frac{1}{R_1}$ est vraie ou conjuguée; quand cette seconde trajectoire se confond elle-même avec la géodésique, $\frac{1}{R_1}$ coïncide avec L . Il n'y a d'exception à ce théorème que si la tangente $M_1 T$ a comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ ⁽¹⁾. Quand tous les Π_i , par suite tous les B_r , sont nuls, à toute valeur de $\frac{1}{R}$ comprise entre 0 et $+\infty$ correspondent deux trajectoires, l'une vraie, l'autre conjuguée.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où M arriverait en M_1 à l'instant t_1 avec une vitesse nulle. Montrons d'abord que les rapports $\frac{q'_i}{q'_1}$ tendent vers une limite quand t tend vers t_1 . On a,

(1) Ces théorèmes et d'autres analogues prennent une forme plus élégante quand on regarde, d'après les idées de M. Beltrami, $q_1, q_2, \dots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace non euclidien dont le ds^2 est le ds^2 défini par T , $ds^2 = \Sigma A_{ij} dq_i dq_j$. Mais c'est là un point sur lequel je reviendrai dans un autre travail.

en effet,

$$q_i = \frac{(t-t_1)^2}{1.2} [\beta_i(a_1, a_2, \dots, a_k) + \delta_i] = \frac{(t-t_1)^2}{2} (\beta_i^0 + \delta_i),$$

$$(i = 2, \dots, k),$$

les δ_i tendant vers zéro avec $t - t_1$, et l'un au moins des β_i^0 , soit β_1^0 , n'étant pas nul (¹). Les rapports $\frac{q_i}{q_1}$ tendent donc vers $\frac{\beta_i^0}{\beta_1^0}$. J'ajoute que les intégrales $q_i(t)$ sont alors des fonctions paires de $(t - t_1)$; autrement dit, si l'on pose $t - t_1 = \tau = 0^2$, on a

$$(n) \quad q_i = a_i + b_i 0 + c_i 0^2 + \dots, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (b_1 \neq 0).$$

Si, en effet, dans les intégrales $q_i(\tau)$ on change τ en $-\tau$, on obtient encore un système d'intégrales : quand le premier système répond aux conditions initiales $q_i^0, q_i'^0$ pour $t = t_1$, le second répond aux conditions $q_i^0, -q_i'^0$; ici, les $q_i'^0$ étant nuls, les conditions initiales restent les mêmes, les deux systèmes d'intégrales coïncident. Donc $q_i(\tau) \equiv +q_i(-\tau)$. Quand t dépasse l'instant t_1 , le système *S rétrograde*; à l'instant $t_1 + \tau$ il repasse par la même position qu'à l'instant $t_1 - \tau$, mais toutes les vitesses ont changé de sens.

Les équations (n) nous montrent que la trajectoire (C) se poursuit au delà de M_1 , et admet en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue*. Cette tangente, au point M_1 , a comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. De plus, σ désignant l'arc de (C) compté dans le sens du mouvement, on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = (t - t_1) (-\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2} + \varepsilon) = (t - t_1)(B + \varepsilon)$$

(ε tendant vers zéro avec $t - t_1$); $\sigma(t)$ passe donc par un maximum pour $t = t_1$. Sur l'arc $M_1 M'$ de (C), qui fait suite au point M_1 , c'est le mouvement *conjugué* qui est réel. Le point M_1 de (C) où le point M rétrograde sur sa trajectoire sera dit un *point d'arrêt*. L'arc MM' que le point M_1 divise en deux parties, l'une parcourue dans le mouvement *vrai*, l'autre dans le mouvement *conjugué*, sera dit *trajectoire mixte*.

Au point d'arrêt M_1 , la courbe (C) peut d'ailleurs ne pas admettre de *courbure*. Si l'on suppose toutefois qu'en ce point les coeffi-

(¹) Autrement M_1 serait un point d'équilibre et t_1 serait infini.

cients $\lambda_{r,s}^i$, β_i des équations (2) ont des dérivées secondes continues par rapport aux q_i , les q_i ont des dérivées secondes par rapport au paramètre $\theta \equiv (t - t_1)^2$, et (C) admet en M_1 et dans le voisinage une courbure continue. Si notamment le point M_1 est un point *analytiquement* régulier des A_{ij} , Q_i , la courbe (C) est analytique et régulière dans le domaine de M_1 .

Trajectoires singulières. — Supposons maintenant que, t croissant indéfiniment, M tende vers une position régulière d'équilibre P . La trajectoire (C) passe par le point P , mais en ce point elle n'admet pas nécessairement de tangente; la longueur de l'arc PM peut être infinie; enfin la courbe *réelle* (supposée analytique) peut ne pas se prolonger au delà du point P .

Soit, par exemple, un point M (ou x, y) de masse 1 mobile dans un plan et soumis à la force $X = \lambda^2 x$, $Y = \mu^2 y$; l'origine O ($x = 0, y = 0$) est un point d'équilibre, et il existe une infinité de mouvements dans lesquels M tend vers O quand t croît indéfiniment, à savoir les mouvements $x = Ce^{-\lambda t}$, $y = C'e^{-\mu t}$; les trajec-

toires correspondantes $y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$ admettent l'origine comme point singulier transcendant si $\frac{\mu}{\lambda}$ est incommensurable, algébrique si $\frac{\mu}{\lambda}$ est commensurable. Dans tous les cas, la courbe admet une tangente à l'origine, l'arc σ ou M_0M tend vers une limite finie quand M tend vers o , et ce point n'est pas une *extrémité analytique* de la trajectoire.

Si la force était $X = 2x^3$, $Y = \mu^2 y$, la trajectoire $y = Ce^{-\frac{\mu}{x}}$, parcourue dans chaque mouvement $x = \frac{1}{t}$, $y = Ce^{-\mu t}$, admet une tangente en O (l'axe des x); l'arc OM_0 a une longueur finie, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

La force $X = 2y$, $Y = -2x$ donnerait lieu de même aux mouvements $x = Ce^{-t} \cos t$, $y = Ce^{-t} \sin t$, et chaque trajectoire correspondante (dont l'équation en coordonnées polaires est $r = Ce^{-\theta}$) est une spirale logarithmique ayant l'origine comme point asymptote. En ce point, la courbe n'a pas de tangente; l'arc OM_0 a une longueur finie $C\sqrt{2}e^{-\theta_0}$, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

Enfin, considérons la force

$$X = \frac{3}{4}x(x^2 + y^2)^2 - x + y(x^2 + y^2), \quad Y = \frac{3}{4}y(x^2 + y^2)^2 - y - x(x^2 + y^2);$$

le mouvement est défini, en coordonnées polaires, par les équations

$$r'' - r\theta'^2 = \frac{3}{4}r^5 - r, \quad \frac{d}{dt}(r^2\theta') = -r^4.$$

Dans le mouvement particulier $r = t^{-\frac{1}{2}}$, $\theta = t$, la trajectoire $r = \theta^{-\frac{1}{2}}$ admet O comme point asymptote (et extrémité analytique), et l'arc MM_0 croît indéfiniment quand M tend vers O.

Nous donnerons le nom de *branche singulière* de trajectoire à tout arc M_1M de trajectoire, tel que M_1M ne soit pas parcouru en un temps fini soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué, et cela si voisin du point M_1 qu'on prenne le point M.

Il est clair que les trajectoires que nous venons de considérer sont des *trajectoires singulières*.

CLASSIFICATION ET PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES RÉELLES.

Il suffit d'étudier les trajectoires vraies : tout ce que nous allons dire s'appliquera aux trajectoires conjuguées, puisqu'on passe du mouvement vrai au mouvement conjugué en changeant t en it .

Plaçons donc le système à l'instant t_0 dans des conditions initiales réelles $q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0; q_1'^0, q_2'^0, \dots, q_k'^0$, et comptons l'arc σ de la trajectoire (C) à partir du point M_0 dans un sens tel que σ commence par croître avec t ; σ continuera de croître avec t tant que t n'atteindra pas soit une valeur t_i pour laquelle le mouvement cesse d'être régulier, soit une valeur t_1 pour laquelle $\frac{d\sigma}{dt}$, et par suite tous les q_i' s'annulent.

Envisageons d'abord la première hypothèse : quand t tendra vers t_1 , ou bien le point M de coordonnées $(q_1, q_2, \dots, q_k)$ ne tendra vers aucune position limite M, à distance finie, auquel cas σ croîtra indéfiniment, ou bien M tendra vers un point singulier N de E_k . D'après ce qui précède, il n'y a pas d'autres cas possibles.

Dans la seconde hypothèse (où tous les q_i s'annulent quand t tend vers t_1), σ croît jusqu'à une certaine limite σ_1 , puis décroît et reprend pour $t_1 + \alpha$ la même valeur que pour $t_1 - \alpha$; le point M rétrograde sur sa trajectoire, qui est une trajectoire *mixte*; le point M_1 , qui correspond à la valeur σ_1 de l'arc, est un *point d'arrêt*. Quand la trajectoire (C) n'est pas une trajectoire *remarquable*, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ a en chaque point de M_0M une valeur déterminée $\varphi(\sigma)$; l'égalité (voir p. 164)

$$\sigma - \sigma_1 = (t - t_1)^2 \left(\frac{B}{2} + \varepsilon' \right)$$

et sa conséquence

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (\sigma - \sigma_1)(2B + \varepsilon')$$

prouvent que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ ou $\varphi(\sigma)$ reste fonction continue de σ (mais change de signe) quand σ dépasse la valeur σ_1 .

Le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend de k constantes arbitraires, par exemple les k coordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ du point d'arrêt M_1 . Il peut se faire toutefois que ces k constantes ne soient pas distinctes; cela n'a lieu que si la même trajectoire mixte (Γ) correspond à une infinité de valeurs des constantes $a_1, a_2, \dots, a_k$, telles qu'on puisse prendre arbitrairement au moins l'une d'entre elles. S'il en est ainsi, tous les points d'un segment de (Γ) sont des points d'arrêt et, par suite, une infinité de mouvements sont possibles sur (Γ) qui doit être une trajectoire *remarquable*. Comme, d'autre part, par un point M_0 il passe au moins une trajectoire mixte, à savoir celle qui admet M_0 comme point d'arrêt, on voit que le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend soit de k constantes, soit de $(k - 1)$ constantes; dans ce dernier cas (qui est un cas particulier), le faisceau (Γ) se confond avec celui des trajectoires remarquables.

Une trajectoire *remarquable* (γ) doit d'ailleurs être regardée comme une trajectoire mixte, en ce sens qu'un point quelconque de (γ) est *point d'arrêt* pour un des mouvements de M sur (γ). En effet, tous ces mouvements sont définis par une égalité de la forme

$$T = f(q_1) + h,$$

où h est une constante arbitraire. Soit pour $t=t_0$, $q_1=a_1$, et soit $h=-f(a_1)$; au point $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de (γ) la force vive, et par suite $q'_1, \dots, q'_k$, s'annulent, et M rétrograde sur (γ) . Mais il peut exister sur (γ) des mouvements qui aient lieu toujours dans le même sens. Par exemple, si (S) est un point, mobile dans le plan des xy et repoussé par l'origine O proportionnellement à la distance, Ox est une trajectoire remarquable, et les mouvements sur Ox sont définis par l'égalité

$$x'^2 = k^2 x^2 + h;$$

si h est positif, x' ne s'annule pas et l'axe des x est parcouru tout entier dans le même sens quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$. Si h est négatif, le mouvement présente un point d'arrêt.

Il importe de préciser les conditions dans lesquelles les trajectoires *mixtes* et les trajectoires *remarquables* se confondent. Considérons un domaine V_k de E_k dans lequel les déterminations prises pour les A_{ij} , Q_i soient uniformes et régulières. D'après une remarque faite plus haut, dans tous les cas V_k se décompose en domaines partiels V'_k , V''_k caractérisés par la propriété suivante : dans un domaine V'_k , par un point M quelconque passe une trajectoire remarquable; dans un domaine V''_k , les points qui appartiennent à une trajectoire remarquable ne forment pas un domaine fini à k dimensions. Ceci rappelé, il est clair que *par un point d'un domaine V'_k passe une trajectoire mixte, et une seule, ayant un point d'arrêt dans V'_k* ; le faisceau de ces trajectoires est formé, en effet, des trajectoires qui passent par chaque point M de V'_k et correspondent à une vitesse nulle en ce point, conditions initiales qui définissent la trajectoire remarquable passant par M . Au contraire, *par un point arbitraire de V''_k passent une infinité de trajectoires mixtes dépendant d'une constante arbitraire* (et ayant un point d'arrêt dans V''_k): autrement, ces trajectoires ne dépendraient dans V''_k que de $(k-1)$ constantes distinctes et seraient des trajectoires remarquables; un point arbitraire de V''_k appartiendrait donc à une trajectoire remarquable, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour que le faisceau des trajectoires mixtes se confonde avec le faisceau des trajectoires remarquables, il faut donc et il suffit que par un point arbitraire de E_k (quelles que

soient les déterminations choisies pour les A_{ij} , Q_i passe une trajectoire remarquable.

Dans la discussion précédente, nous avons supposé t , fini : si le mouvement reste régulier quand t croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucune position limite M_1 et l'arc σ de (C) croît indéfiniment avec t , ou bien M tend vers un point d'équilibre P qui peut être un point singulier quelconque de (C) .

D'après cela, soit M un point quelconque de E_k dans le voisinage duquel les déterminations prises pour les A_{ij} , Q_i sont régulières, *et qui n'est pas un point d'équilibre. Toute trajectoire (C) qui aboutit au point M admet une tangente en ce point et se prolonge au delà*; si, en effet, (C) n'est pas une géodésique, T a au point M une valeur bien déterminée, soit T_0 ; quand T_0 est différent de zéro, la trajectoire se prolonge dans le mouvement même (vrai ou conjugué); quand T_0 est nul, les deux mouvements (vrai et conjugué) qui répondent à la position initiale M et aux conditions initiales $q_i^0 = 0$ définissent la trajectoire (C) en deçà et au delà de M . Si (C) est une *géodésique*, la chose est encore vraie, lors même que M est un point d'équilibre : on le voit en appliquant les théorèmes établis plus haut au cas particulier où tous les Q_i sont nuls. Les trajectoires remarquables sont des géodésiques : il y a lieu toutefois de signaler ici les trajectoires dont un segment seulement M_0M est *remarquable* et, par suite, coïncide avec un segment de géodésique; une infinité de trajectoires MM' prolongent alors le segment M_0M , suivant la valeur de h dans l'égalité $T = f(q_i) + h$ qui définit le mouvement sur M_0M (voir l'exemple de la p. 147).

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Soit (C) une trajectoire définie par la position et la vitesse initiales M_0 et (v_0) de M , les déterminations choisies pour les coefficients A_{ij} , Q_i étant régulières dans le domaine du point M_0 . Il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des A_{ij} , Q_i le long de (C) tant qu'une au moins de ces fonctions ne devient pas discontinue ou égale à une autre détermination du même coefficient. Ceci posé, *toute trajectoire réelle (C) est prolongeable régulièrement ⁽¹⁾ tant qu'elle ne rencontre pas soit un point sin-*

(¹) J'entends par là qu'en chaque point, la courbe admet une tangente con-

gulier N des déterminations considérées des A_{ij} , Q_i , soit un point d'équilibre P (point où tous les Q_i s'annulent) : en chaque point M la courbe (C) admet une courbure continue, sauf peut-être aux points d'arrêt si c'est une trajectoire mixte (non remarquable).

En particulier, toute *géodésique* se prolonge régulièrement et admet une courbure continue tant qu'elle ne rencontre pas un point singulier N des A_{ij} .

Si les coefficients A_{ij} , Q_i sont des fonctions analytiques des q_i , toute trajectoire (C) est une courbe analytique qui se prolonge régulièrement (au sens analytique) tant qu'on ne rencontre pas soit un point N où les A_{ij} , Q_i cessent d'être holomorphes, soit un point d'équilibre.

Soit donc M_0M un fragment continu de la même trajectoire réelle (C), qui ne passe ni par un point singulier N des A_{ij} , Q_i , ni par un point d'équilibre P. La courbe admettant en chaque point (les extrémités comprises) une tangente continue, la longueur totale de cet arc est un certain nombre fini σ . Si (C) n'est pas une trajectoire *mixte* (ce qui est le cas général, le faisceau des trajectoires mixtes ne dépendant que de k constantes), l'arc M_0M est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini, soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué. Ceci est encore vrai, quand la trajectoire (C) étant *mixte* (sans être remarquable) n'admet pas de points d'arrêt entre M_0 et M.

Si (C) est une trajectoire *mixte*, en général elle ne possède qu'un point d'arrêt M_1 . Quand ce point fait partie de l'arc M_0M , cet arc est décomposé en deux parties M_0M_1 et M_1M , l'une trajectoire vraie, l'autre trajectoire conjuguée. Il peut arriver pourtant qu'entre M_1 et M il existe plusieurs points d'arrêt $M_1, M_2, \dots$, mais il n'en existe jamais qu'un nombre fini; supposons, en

tinue sans rebroussement. Ce prolongement ne comporte aucune ambiguïté, sauf dans le cas où (C) est une trajectoire dont des segments partiels sont remarquables; les segments en question appartiennent alors à une infinité de trajectoires réelles. Ce cas ne saurait se présenter quand les A_{ij} , Q_i sont analytiques et sans coupures fermées.

effet, que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \varphi(\sigma)$ admette une infinité de zéros

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \dots < \sigma;$$

σ_n tend vers une limite $\sigma' \leq \sigma$ quand n croît indéfiniment et la fonction $\varphi(\sigma)$, continue entre φ et σ , s'annule pour $\sigma = \sigma'$; comme, par hypothèse, le point M' correspondant n'est pas un point d'équilibre, on a

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \sigma')(2B + \varepsilon), \quad (B \neq 0),$$

ce qui montre que $\varphi(\sigma)$ n'admet dans le voisinage de σ' d'autre zéro que σ' ; l'hypothèse est donc absurde.

D'après cela, on pourra toujours décomposer l'arc M_0M en un nombre fini de segments qui seront tout entiers les uns trajectoires vraies, les autres trajectoires conjuguées. A chaque segment M_1M_2 , compris entre deux points d'arrêt, correspond un mouvement périodique du système (vrai ou conjugué).

Si le segment M_0M est une trajectoire remarquable, chaque point de M_0M est un point d'arrêt d'un des mouvements correspondants; mais on peut toujours, dans l'égalité

$$(a) \quad T = f(q_1) + h = F(\sigma) + h,$$

prendre h assez grand pour que M_0M soit parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement vrai. De plus, aucun des mouvements qui ont lieu sur (C) ne saurait présenter entre M_0 et M deux points d'arrêt. Admettons, en effet, que T s'annule en M_1 et en M_2 ; d'après l'égalité (a), $F'(\sigma)$ (qui est continu en M_0 et M) s'annule entre M_1 et M_2 , donc entre M_0 et M ; si $F'(\sigma)$ est identiquement nul, T est constant et différent de zéro; sinon, soit σ' le premier zéro de $F'(\sigma)$ qu'on rencontre en partant d'un point μ de M_0M où $F'(\sigma)$ est différent de zéro et en allant vers M (ou vers M_0); je dis que le point M' (ou σ') de C doit être un point d'équilibre P ; il suffit, pour le voir, de considérer le mouvement défini sur (C) par l'égalité

$$T = F(\sigma) - F(\sigma') = (\sigma - \sigma')^2 - F_1(\sigma);$$

comme, entre μ et M' , $F_1(\sigma)$ s'annule au plus une fois (soit en M_1) le long d'un arc fini M_1M' , le signe de F_1 est constant, et il est loisible de le supposer positif (sinon on changerait t en it); on a

donc

$$dt = \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma'} g(\sigma),$$

$g(\sigma)$ restant supérieur à un certain nombre positif quand σ varie entre $\sigma' - \alpha$ et σ' ; t croît donc indéfiniment quand σ tend vers σ' , ou encore σ tend vers σ' quand t croît indéfiniment. Cela n'est possible que si M' est un point d'équilibre ⁽¹⁾. Il suit de là que pour h suffisamment grand ($h > h_1$) le segment M_0M sera parcouru en entier dans le mouvement vrai correspondant; pour h inférieur à une certaine limite h_2 , le segment sera parcouru en entier dans le mouvement conjugué; pour h compris entre h_1 et h_2 , M_0M se décomposera en deux parties, parcourues l'une dans le mouvement vrai, l'autre dans le mouvement conjugué; h_1 et h_2 peuvent être infinis.

Enfin si le segment M_0M n'est que *partiellement* une trajectoire remarquable, par exemple si le segment M_0M' est remarquable et le segment $M'M$ ordinaire, la valeur de T au point M' détermine la valeur de h , donc de T , le long de M_0M' ; T a ainsi une valeur bien définie le long de M_0M qui jouit, par suite, des mêmes propriétés qu'une trajectoire ordinaire.

Branches de trajectoires singulières. — Admettons maintenant que le segment M_0M passe par des *points d'équilibre* P (mais non par des points singuliers). Soit P le premier point

(1) Il est facile de vérifier cette conclusion ainsi. On a

$$F'(\sigma) = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} + \dots + Q_k \frac{dq_k}{d\sigma};$$

mais, d'autre part, (C) étant une trajectoire remarquable, on sait que

$$\frac{dq_i}{d\sigma} = \frac{dq_i}{d\sigma}, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

d'où l'égalité

$$F'(\sigma) = \frac{Q_1 \beta_1 + \dots + Q_k \beta_k}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_k^2}},$$

ou bien, comme $Q_i = \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \beta_j$,

$$F'(\sigma) = \frac{T(q_1, q_2, \dots, q_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_k^2}},$$

expression qui ne peut être nulle que si tous les β_i sont nuls.

d'équilibre que l'on rencontre sur M_0M en partant de M_0 ; étudions le segment M_0P en supposant d'abord que (C) n'est pas une trajectoire remarquable.

Dans cette hypothèse, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ est une fonction de σ , continue tant que M reste compris entre M_0 et P ; mais qu'arrive-t-il quand M tend vers P ? Je dis que $\varphi(\sigma)$ tend vers une limite. Tout d'abord, si $\varphi(\sigma)$ tend vers zéro, la proposition est démontrée; s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver sur (C) des points M aussi voisins que l'on veut de P et tels que $\varphi(\sigma)$ (et par suite un au moins des q_i^2) ait en M une valeur absolue supérieure à un certain nombre fixe λ^2 . En répétant alors identiquement le raisonnement de la page 160 (soit sur le mouvement vrai, soit sur le mouvement conjugué), on voit que M doit atteindre en un temps fini la position P avec une force vive déterminée et finie, et par suite le mouvement, comme la trajectoire (C) , se prolongent régulièrement au delà de P . En résumé, *$f(\sigma)$ tend vers une limite $f(P)$ quand on fait tendre M vers P sur la courbe MP , et, si cette limite n'est pas nulle, le point P est un point ordinaire de (C) .*

Si au contraire $f(P)$ est nul, l'arc M_0P ne saurait être parcouru en un temps fini dans le mouvement soit vrai, soit conjugué, et cela si voisin de P qu'on prenne M_0 sur la trajectoire. Le segment M_0P est donc, d'après notre définition, *une branche singulière de trajectoire*. Mais deux circonstances distinctes peuvent se présenter suivant que $f(\sigma)$ s'annule ou non un nombre infini de fois entre M_0 et P . Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas qui est le plus général.

1° *Il n'existe entre M_0 et P qu'un nombre fini de zéros de $f(\sigma)$.* Il suffit alors de considérer le segment M_1P adjacent à P et où $f(\sigma)$ garde un signe constant qu'il est loisible de supposer positif. Quand t croît, le point M placé entre M_1 et P et lancé vers P tangentiellement à (C) avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ tend vers P quand t croît indéfiniment. Le point P peut être un point singulier quelconque et une extrémité analytique de (C) . Nous avons donné plus haut des exemples de cette singularité.

2° *$f(\sigma)$ admet une infinité de zéros $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ entre M_0 et P .* Les points d'arrêt $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ tendent vers P

quand n croît indéfiniment. Le segment M, P se trouve ainsi décomposé en une *infinité* de segments $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots$ qui tendent vers P et qui correspondent à autant de mouvements *périodiques* (alternativement vrais ou conjugués), dont l'*amplitude* tend vers zéro. Comme exemple de ce cas, citons les équations

$$(A) \quad \begin{cases} x' = \frac{xy}{2} \left[\frac{7}{4}(x^2 + y^2)^2 - 3 \right] + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(5y^2 - x^2), \\ y' = \frac{7}{8}y^2(x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{2}xy(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2} - y^2. \end{cases}$$

Une des trajectoires définie par (A) est la suivante

$$x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\theta}}, \quad y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}},$$

ou encore, en coordonnées polaires,

$$\theta = \frac{1}{r^2};$$

cette trajectoire admet l'origine (point d'équilibre) comme point asymptote, et le mouvement correspondant est défini par l'égalité

$$dt = \frac{d\theta \theta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin \theta}} = - \frac{2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{r \sin \frac{1}{r^2}}}.$$

Sur chaque arc de courbe $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$ le mouvement vrai est réel et périodique, sur les arcs $(2n+1)\pi < \theta < 2(n+1)\pi$, c'est le mouvement conjugué qui est périodique.

Comme dans le premier cas, P peut être un point singulier de nature quelconque et une *extrémité* de (C); quand M tend vers P , τ peut tendre vers une limite, ou croître indéfiniment comme dans l'exemple ci-dessus.

Quand la courbe C , dans l'un ou l'autre cas, se prolonge au delà de P , elle peut passer par un autre point d'équilibre P_1 , etc. Il peut arriver que les points d'équilibre forment sur (C) une *suite* ayant certains points *limites* P' qui sont nécessairement des points d'équilibre ⁽¹⁾; mais, dans tous les cas, $f(\tau)$ est une fonc-

(¹) Par exemple, soit M un point mobile dans un plan et soumis à une force qui s'annule tout le long d'une certaine courbe (G) et soit M_0 un point de cette

tion continue le long de M_0M , qui s'annule en tous les points d'équilibre *singuliers* pour la trajectoire et en particulier aux points limites P' .

Toutes les trajectoires singulières qui passent par un point d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ s'obtiendront donc en cherchant toutes les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \dots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \frac{dq'_2}{\beta_2 + \Pi_2} = \dots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales

$$q_i = a_i, \quad q'_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Il nous reste à dire un mot du cas que nous avons laissé de côté où la trajectoire M_0P serait remarquable. Si cette trajectoire n'est que partiellement remarquable, ce qui précède subsiste; mais quand un segment fini attenant au point P , soit M_0P , est *tout entier* remarquable, on peut aller plus loin. Tout d'abord, disposons de la constante h de façon que le point M atteigne le point P avec une vitesse différente de zéro; *la trajectoire se prolonge alors régulièrement au delà du point P* . Si, au delà de P , la trajectoire est encore remarquable (ce qui a lieu nécessairement quand P est un point *analytiquement régulier* des A_{ij}, Q_i), ce prolongement n'est possible que d'une seule manière; sinon une infinité de trajectoires prolongent régulièrement M_0M .

Dans les deux cas, le mouvement sur M_0P étant défini par l'égalité

$$T = F(\sigma) + h,$$

si l'on donne à h la valeur $F(P)$, le point M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment. Quand la trajectoire est encore remarquable au delà du point P , on a dans le voisinage de P (où $\sigma = \sigma'$)

$$T = h + (\sigma - \sigma')^2(A + \epsilon),$$

A ayant une valeur finie et ϵ tendant vers zéro avec $(\sigma - \sigma')$. En effet, la trajectoire (C) , étant une géodésique, admet en chaque point, notamment au point P , une courbure continue, et l'égalité

courbe; il peut se faire qu'une trajectoire passant par M_0 rencontre (G) en une infinité de points voisins de M_0 qui soient tous points singuliers de la trajectoire.

$F'(\sigma) = \sum Q_i \frac{dq_i}{d\sigma}$ montre que $F''(\sigma)$ existe au point P. Si A est négatif, les mouvements correspondant à de petites valeurs de h sont périodiques autour de P; si A est positif, la même remarque s'applique aux mouvements conjugués.

Observons qu'une trajectoire remarquable (γ) peut d'ailleurs renfermer un nombre infini de points d'équilibre P formant une suite. C'est ce que montre l'exemple des deux équations

$$2x'' = x^3 \left(5x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right), \quad y'' = 0,$$

qui admettent les trajectoires remarquables $y = y_0$ le long desquelles le mouvement est défini par la relation

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = x^5 \sin \frac{1}{x} + h;$$

toutes les racines x_i de l'égalité $\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{5x}$ correspondent à des points d'équilibre P qui tendent vers l'origine.

Dans cet exemple, les fonctions X, Y $\equiv 0$ sont continues ainsi que leurs dérivées premières à l'origine. Mais il convient de remarquer que la singularité en question ne se présente pas si les coefficients A_{ij} , Q_i sont des fonctions *holomorphes* dans le domaine du point P. En effet, le point P est alors un point analytique régulier de la trajectoire (γ) et les variables q_i sont des fonctions holomorphes de σ dans le voisinage de σ' ; la fonction $F'(\sigma) \equiv \sum Q_i \frac{dq_i}{d\sigma}$ est donc holomorphe dans le voisinage de σ' , et σ' est nécessairement un zéro isolé de $F'(\sigma)$. *Lors donc que le point d'équilibre P est un point analytiquement régulier des A_{ij} , Q_i , toute trajectoire remarquable M_0P est prolongeable analytiquement et reste au delà du point P régulière et remarquable; de plus P est un point d'équilibre isolé sur cette trajectoire.*

Observons enfin que les β_i peuvent être nuls tout le long du segment M_0M de la trajectoire (γ). Il faut pour cela et il suffit que la *géodésique* M_0M de T soit un lieu de points d'équilibre P. Le mouvement sur M_0M est alors le même que si le système S n'était soumis à aucune force; T est constant.

Remarque sur le cas où les forces Q_i dérivent d'un potentiel $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. — S'il existe une fonction de forces U , et si, de plus, les points d'équilibre P ne forment pas un ensemble continu, les trajectoires (C) qui passent par un point d'équilibre P sont nécessairement exceptionnelles.

Tout d'abord, les trajectoires (C) pour lesquelles P est un point ordinaire [$T \neq 0$ en P] dépendent seulement de k paramètres. Quant à celles pour lesquelles P est un point singulier [$\dot{T} = 0$ en P], elles satisfont à la condition

$$U(a_1, a_2, \dots, a_k) + h = 0.$$

Ces trajectoires correspondent donc à des valeurs particulières de h , et par suite ne peuvent dépendre de plus de $(2k - 2)$ constantes.

CONCLUSIONS.

Les principaux résultats que nous avons obtenus au sujet des trajectoires réelles se résument ainsi :

Soit V_k un domaine de E_k dans lequel les déterminations choisies pour les fonctions A_{ij} , Q_i sont uniformes et continues; nous admettons de plus que les dérivées premières des Q_i et les dérivées secondes des A_{ij} sont aussi continues dans le même domaine.

I. *Par un point M de V_k passe une géodésique de T , et une seule, tangente à la direction MT ; toute géodésique est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de V_k et admet en chaque point une courbure continue.*

II. *Toute trajectoire réelle (C) de (S) est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de V_k ou que l'on ne rencontre pas dans V_k un point d'équilibre P (point où tous les Q_i sont nuls).*

Une trajectoire (C) ne comporte que deux mouvements distincts dont l'un se déduit de l'autre en changeant t en $-t$. Il n'y a d'exception que pour certaines trajectoires remarquables (γ) qui n'existent pas en général et qui se composent des géodésiques de T satisfaisant en même temps aux conditions

$$(A) \quad \frac{q'_1}{\beta_1} = \frac{q'_2}{\beta_2} = \dots = \frac{q'_k}{\beta_k}.$$

Ces trajectoires (γ) dépendent au plus de $(k - 1)$ constantes; sur une telle trajectoire une infinité de mouvements distincts (dépendant d'une constante) sont possibles.

Tout segment de trajectoire réelle compris dans V_k et ne renfermant pas de point d'équilibre est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement régulier soit vrai, soit conjugué. Il n'y a d'exceptions que pour une classe de trajectoires dépendant de k constantes, et qui se décomposent en segments alternativement vrais ou conjugués, les points de séparation étant des points d'arrêt où T s'annule et où le système rétrograde. Ces trajectoires (*trajectoires mixtes*) ne dépendent plus que de $(k - 1)$ constantes et se confondent avec les trajectoires remarquables quand toutes les courbes définies par (A) dans V_k sont des géodésiques.

Quand la trajectoire (C) rencontre dans V_k un point d'équilibre P, les conclusions précédentes subsistent si la trajectoire (C) est remarquable, ou si, (C) étant trajectoire ordinaire, T [qui a une valeur déterminée en chaque point de (C)] ne s'annule pas en P. Mais si T s'annule en P, l'arc M_0P de (C) ne saurait être parcouru en un temps fini (si petit que soit M_0P) dans le mouvement vrai ou conjugué. C'est une branche *singulière* de trajectoire qui peut admettre P comme point singulier quelconque et comme extrémité analytique.

Les seuls points de V_k par lesquels puisse passer une trajectoire sans tangente continue sont donc les points d'équilibre P.

III. On peut toujours admettre que V_k est tout entier soit de l'espèce V'_k (c'est-à-dire qu'un point quelconque de V_k appartient à une trajectoire remarquable), soit de l'espèce V''_k (c'est-à-dire que les trajectoires remarquables n'emplissent aucun domaine fini à k dimensions à l'intérieur de V_k).

Ceci posé, plaçons-nous d'abord dans le cas particulier où V_k est de l'espèce V'_k .

Toutes les trajectoires (C) qui passent par un point M de V_k qui n'est pas un point d'équilibre ont en ce point une tangente et une courbure continues. Par un point M passent deux trajectoires tangentes en M à une direction donnée MT et de courbure

donnée $\frac{1}{R}$, pourvu seulement que la direction MT ne soit pas la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ et que $\frac{1}{R}$ soit supérieur à une certaine limite qui peut être nulle. Quand MT coïncide avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, toutes les trajectoires tangentes à MT se confondent avec la géodésique tangente en M à MT, qui est une trajectoire remarquable : il ne passe pas par M d'autre trajectoire *mixte*, ayant un point d'arrêt dans V_k .

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où V_k est de l'espèce V_k'' . *Toutes les trajectoires qui passent par un point M de V_k (qui n'est pas un point d'équilibre) admettent en M une tangente et une courbure continues, sauf peut-être la trajectoire unique qui admet M comme point d'arrêt.* Cette dernière a en M une tangente continue, mais n'a pas nécessairement de courbure. Par un point arbitraire M passent encore deux trajectoires tangentes à MT et de courbure donnée, pourvu que MT ne se confonde pas avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Si MT coïncide avec cette direction, il existe une infinité de trajectoires tangentes à MT, *mais toutes ces trajectoires ont même courbure en M*; il existe de plus une trajectoire *isolée* tangente à MT, admettant M comme point d'arrêt, et qui n'a pas nécessairement de courbure en M.

Par chaque point M de V_k passent une infinité de trajectoires *mixtes* (dépendant d'une constante arbitraire) et présentant un point d'arrêt M' dans V_k .

Que V_k soit de l'espèce V_k' ou V_k'' , si les A_{ij} , Q_i sont holomorphes dans V_k , toute trajectoire est une ligne analytique régulière dans V_k , sauf peut-être aux points d'équilibre P.

Soit maintenant P un point d'équilibre de V_k . Par ce point passent une infinité de trajectoires (C) tangentes en P à la droite PT, et ces trajectoires ont même courbure que la géodésique qui leur est tangente : elles se confondent avec cette géodésique dans le cas particulier où V_k est de l'espèce V_k' et où toutes les trajectoires remarquables passent par P. Mais le fait le plus important, c'est qu'il peut exister en dehors de ces trajectoires d'autres branches singulières passant par P et telles que le segment M_0P d'une de ces branches (si petit qu'il soit) ne soit

parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué.

Ces branches singulières peuvent ne pas admettre de tangente au point P et ne pas se prolonger analytiquement au delà. Toutes ces branches s'obtiennent en cherchant les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \dots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \dots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales $q_i = a_i$, $q'_i = 0$, ($a_1, a_2, \dots, a_k$ étant les coordonnées des points P) (1). Ces conditions donnent en particulier les trajectoires remarquables qui passent par P.

IV. Enfin, quand les forces dérivent d'un potentiel, une trajectoire prise au hasard n'est ni mixte, ni remarquable, ni singulière; elle se prolonge donc régulièrement et est parcourue tout entière dans le même sens d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué) tant qu'on ne rencontre pas un point singulier des A_{ij} , Q_i .

Exemple. — Pour appliquer ces généralités à un exemple, traitons le cas d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force (F) qui dérive d'un potentiel $U(x, y, z)$, fonction holomorphe des trois variables réelles x, y, z ; nous admettons de plus que les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ ne s'annulent simultanément qu'en des points isolés.

Toute trajectoire est une courbe analytique qui se prolonge indéfiniment d'une manière régulière tant qu'on ne rencontre pas un point d'équilibre. De plus, une trajectoire prise au hasard ne

(1) Quand il n'y a pas de point d'équilibre, il n'y a pas de branches singulières. En général, les points d'équilibre sont isolés, mais ils peuvent, dans des cas particuliers, former un ensemble continu. Par chaque point d'équilibre P, il peut ne passer qu'un nombre fini de branches singulières, ou il peut en passer une infinité dépendant de constantes; c'est ce dernier cas qui est réalisé dans les exemples cités plus haut; le premier est réalisé dans le mouvement défini par les équations

$$x'' = x, \quad y'' = -y,$$

où les seules trajectoires définies par les conditions initiales $x = 0, y = 0, x' = 0, y' = 0$ sont les deux axes O*x* et O*y* (trajectoires remarquables).

ne passe pas par un point d'équilibre; elle est prolongeable indéfiniment d'une façon régulière et un segment fini quelconque est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué).

Deux cas principaux sont d'ailleurs à distinguer suivant que les surfaces de niveau $U = \text{const.}$ forment ou non une famille de surfaces *parallèles*. Dans le premier cas, les normales à ces surfaces forment une congruence de trajectoires remarquables (γ). Toute trajectoire, autre que ces droites, est ou vraie, ou conjuguée. Les trajectoires mixtes se confondent avec les droites remarquables (γ). Par un point d'équilibre P passent *en général* une infinité de normales, formant un cône du second degré, et qui sont autant de trajectoires remarquables : si on place M sur une de ces droites (γ) avec une vitesse convenable, M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment; la même droite comportera une infinité de mouvements périodiques (vrais ou conjugués) où M oscillera autour de P .

Quand les surfaces de niveau ne sont pas *parallèles*, il ne passe pas par un point arbitraire de trajectoire remarquable. Les trajectoires *mixtes* dépendent de trois constantes arbitraires.

Par un point M de l'espace (qui n'est pas un point d'équilibre) passent deux trajectoires tangentes à une droite donnée MT et de courbure donnée; l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Toutefois, si la direction de MT coïncide avec celle de (F) , toutes les trajectoires tangentes à MT ont même courbure en M que la géodésique qui est la droite MT , c'est-à-dire ont en M une inflexion, sauf, toutefois, la trajectoire qui admet M comme point d'arrêt et dont la courbure en M n'est pas nulle en général : si la ligne d'action de (F) est trajectoire singulière, toutes les trajectoires tangentes en M à (F) se confondent avec cette droite (F) . C'est ce qui a lieu, quel que soit M , quand les surfaces de niveau sont parallèles.

Par un point d'équilibre P passent une infinité de trajectoires tangentes à une direction donnée PT et toutes ces trajectoires (qui dépendent d'une constante arbitraire) ont une inflexion en P ; toutefois, si PT est trajectoire remarquable, ces trajectoires se confondent avec la droite PT . Mais, de plus, il peut passer par P d'autres trajectoires *singulières* qui s'obtiennent en cherchant

toutes les intégrales du système.

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy'}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz'}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

qui satisfont aux conditions initiales $x' = y' = z' = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$ (a , b , c étant les coordonnées du point P).

Soit, par exemple, un point M attiré par l'origine proportionnellement à la distance; les surfaces de niveau sont des sphères de centre O, famille parallèle; les trajectoires vraies sont les ellipses concentriques à l'origine, les trajectoires conjuguées les hyperboles; enfin les trajectoires mixtes, confondues avec les trajectoires remarquables, sont les droites (γ) issues de l'origine. Quand on remplace l'attraction par une répulsion, les trajectoires vraies et les trajectoires conjuguées se permutent. Les trajectoires singulières passent par le point d'équilibre O et se confondent avec les droites (γ).

Soit maintenant un point M de masse 1 soumis à la force (F) qui dérive du potentiel $U = xy$. Les trajectoires s'obtiennent en éliminant t entre les relations

$$x = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma \cos t, \quad y = \alpha e^t + \beta e^{-t} - \gamma \cos t, \quad z = ct + c'.$$

Les trajectoires mixtes correspondent aux valeurs des constantes $\alpha = \beta$ et $c = 0$. Les seules trajectoires remarquables sont l'axe des z et les droites $y = \pm x$, $z = c'$, qui se confondent avec les branches singulières passant par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$. Si le potentiel était $\frac{x^4 + y^4}{2}$, les seules trajectoires remarquables seraient l'axe des z et les droites $x = 0$, $z = c'$ d'une part et $y = 0$, $z = c'$ d'autre part, mais par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$ passeraient une infinité de trajectoires singulières

$$y = C e^{\pm \frac{1}{x}}, \quad z = c'.$$

Revenons au mouvement général d'un point. Pour que chaque mouvement vrai du point M soit *périodique*, il faut et il suffit qu'une trajectoire vraie prise au hasard soit une trajectoire fermée (c'est-à-dire qu'en la prolongeant régulièrement à partir d'un quel-

conque de ses points, on revienne au point de départ). Pour qu'un mouvement particulier seulement soit périodique, il faut ou que la trajectoire vraie correspondante soit fermée et ne renferme pas de branche singulière, ou que ce soit une trajectoire mixte admettant deux points d'arrêt entre lesquels le mouvement vrai est réel et régulier, ou enfin que ce soit une trajectoire remarquable (une droite) qui passe par un point d'équilibre P correspondant à un maximum de U sur la droite.

D'une manière générale, un mouvement d'un système quelconque sera périodique chaque fois que la trajectoire correspondante sera une courbe *fermée* qui ne passera ni par un point singulier intrinsèque, ni par un point d'équilibre, pourvu toutefois que la trajectoire ne soit pas une trajectoire remarquable : par trajectoire fermée, j'entends une trajectoire (C) telle que le système (S) partant d'une position quelconque sur (C) et parcourant (C) dans le même sens, revienne à sa position initiale. Mais quand (C) est une trajectoire remarquable, il faut de plus que, dans le mouvement, (S) revienne à la position initiale avec la même force vive, ce qui n'a pas lieu nécessairement. Par exemple, soit un point M de masse 1 mobile sur l'hyperboloïde de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et soumis à la force $X = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Z = 0$; le cercle de gorge de la surface est une trajectoire remarquable fermée qui ne passe ni par un point d'équilibre ni par un point singulier intrinsèque; sur ce cercle, le mouvement est défini par l'égalité $dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\theta + h}}$, et l'on voit que le cercle, quand t croît, est décrit un nombre indéfini de fois avec une vitesse toujours croissante.

Remarques sur les théorèmes précédents. — La proposition fondamentale sur laquelle repose toute la discussion précédente, c'est que les vitesses d'un système restent déterminées, finies et continues tant que le système occupe à chaque instant une position déterminée qui n'est pas une position singulière; mais nous n'avons rien dit du cas où le système traverse une position singulière, non plus que du cas où le système, quand t tend vers t_1 , ne tend pas vers une position déterminée à distance finie.

Quand (S) atteint une position *singulière non intrinsèque*, la

difficulté n'est pas sérieuse, puisqu'on la tourne à l'aide d'un simple changement de variables. Mais, si la singularité N est intrinsèque, deux circonstances sont possibles suivant que les vitesses tendent ou non vers une limite quand le système tend vers la position N. Dans la première hypothèse, il faut avoir recours aux méthodes de M. Poincaré qui permettent, dans des cas très étendus, de discuter les intégrales correspondant à des valeurs initiales singulières (*).

Mais une difficulté bien plus grave réside dans cette circonstance que les vitesses peuvent être indéterminées quand (S) tend vers N, ainsi que dans le fait que, t tendant vers t_1 , (S) peut ne pas tendre vers une position limite. Dans un autre travail, nous ferons voir que ni l'une ni l'autre de ces singularités ne saurait se présenter *quand les équations du mouvement satisfont à certaines conditions*. Ces conditions remplies, il est *théoriquement* possible de représenter les fonctions $q_i(t)$ à l'aide de développements qui convergent pour *toutes* les valeurs réelles de t ; la difficulté consiste à choisir un mode de développement adapté aux équations étudiées; c'est ici que les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard semblent appelées à jouer un rôle considérable.

(*) Lors même que cette discussion analytique peut être menée à bonne fin, on sait qu'elle ne permet pas en général de déterminer *sans ambiguïté* le mouvement ultérieur du système. Par exemple, soit M un point de masse 1 mobile dans le plan des xy et soumis à la force $X = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, $Y = 0$, force bien définie et continue en chaque point, mais pour laquelle $\frac{\partial X}{\partial x}$ est discontinue le long de l'axe des y . Chaque fois que le mobile atteint l'axe des y avec une vitesse dirigée selon cet axe, on a le choix entre trois mouvements ultérieurs possibles, à savoir le mouvement défini par l'égalité $y = at + b$ jointe à l'une des égalités

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{9}(t - t_0)^3, \quad x = -\frac{1}{9}(t - t_0)^3.$$

Le mobile peut d'ailleurs arriver au point d'équilibre $x = 0$, $y = b$ en un temps fini, avec une vitesse nulle. Dans d'autres cas, on a le choix entre une infinité de mouvements.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Démissions :

M. A. Jonquière, M. Ribot et M. le général Dewulf adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Lecornu : *Sur le théorème des aires.*

M. Lecornu : *Sur la théorie mécanique de l'escarpolette.*

M. Humbert : *Sur les arcs des courbes algébriques planes ou gauches.*

M. E. Genty adresse une *Note sur la déformation infinitésimale des surfaces.*

M. Ém. Picard transmet une Note de M. Vessiot *Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. G. Maupin, présenté par MM. Laisant et Bioche ; M. L. Desaint, présenté par MM. Laisant et Max Genty.

Communications :

M. Fleury : *Explication d'un paradoxe de Jean Bernoulli.*

M. Fouret : *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Humbert : *Sur les couples de deux quadriques qui peuvent être touchées chacune en quatre points par une troisième.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DES LIGNES GÉODÉSIQUES ;

Par M. J. ANDRADE.

I. Lorsqu'un mobile assujéti à rester sur une surface est abandonné à lui-même avec une vitesse initiale, il décrit une géodésique de la surface tangente à la direction de la vitesse initiale. Si une force, ne dépendant que de la position du même mobile, vient à agir sur lui, la trajectoire réelle différera peu de la géodésique tangente à la vitesse initiale, pourvu que celle-ci ait une valeur suffisamment grande.

Cette proposition extrêmement vraisemblable, admise quelquefois comme évidente, mérite d'être précisée davantage.

II. Pour abrégér le langage, je dirai qu'une surface est *régulière* autour d'un arc géodésique OM_0M_1 parcouru dans le sens où l'on rencontre dans l'ordre énoncé les trois points consécutifs de cet arc, si cet arc satisfait aux conditions suivantes :

1° L'arc considéré est intérieur à un domaine D de la surface, domaine aux divers points duquel existe un plan tangent et restent finies les deux courbures principales ;

2° On peut, à l'intérieur de ce domaine D , *séparer* deux domaines, l'un Ω entourant le point O , l'autre Δ comprenant à son intérieur l'arc M_0M_1 de manière que les géodésiques Γ , *contenues* dans le domaine D et joignant un point quelconque O' de Ω à un point quelconque de Δ , soient déterminées. De plus, soit un arc $\mu_0\mu_1$ de la géodésique Γ qui soit contenu dans le domaine Δ : tout élément linéaire ds de la surface qui s'appuie sur l'arc $\mu_0\mu_1$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

les variables u et v restant finies et la fonction $G(u, v)$ ne s'annulant jamais dans le domaine Δ , où elle reste d'ailleurs finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

III. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si une surface est régulière autour de la géodésique OM_0M_1 , parcourue dans le sens où l'on rencontre consécutivement les trois points O , M_0 , M_1 , et si on lance un mobile en la position initiale M_0 avec une vitesse tangente à cette géodésique et dans le sens M_0M_1 , puis qu'on soumette le mobile à une force F finie et continue dans le domaine D , on aura pu choisir la grandeur V_0 de la vitesse initiale assez grande pour que l'arc M_0M_1 de géodésique pris dans sa totalité diffère aussi peu qu'on voudra de la trajectoire du mobile parcourue durant un temps égal à celui qu'un mobile libre sur la surface et lancé avec la même vitesse initiale mettrait à parcourir l'arc géodésique M_0M_1 .

Étudions d'abord le mouvement du mobile en prenant des coordonnées polaires de pôle O ; soient u et v les coordonnées polaires d'un point de la trajectoire. Tout élément linéaire appuyé en ce point aura la forme (1), où nous supposons que la ligne géodésique OM_0M_1 ait pour équation $v = 0$. Posons alors

$$(2) \quad \begin{cases} u = V_0 t + \xi + u_0, & (u_0 = \text{arc } OM_0 \text{ sur la géodésique}). \\ v = r, \end{cases}$$

Si le travail virtuel de la force F est représenté par l'expression $Q_u \delta u + Q_v \delta v$, les équations du mouvement seront

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\xi'}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \eta'^2 + Q_u, \\ \frac{d\eta'}{dt} = \frac{-\eta' \left(\frac{\partial G}{\partial u} \xi' + \frac{\partial G}{\partial v} \eta' \right)}{G} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \eta'^2 + \frac{Q_v}{G} - \frac{\eta'}{G} \frac{\partial G}{\partial u} V_0, \\ \frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta'. \end{cases}$$

Conditions initiales : $\xi_{(0)} = \xi'_{(0)} = v_0 = v'_0 = 0$.

Prolongeons un peu l'arc M_0M_1 en M_2 et soit A l'arc M_0M_2 , soit b une quantité positive que nous ferons tendre ultérieurement vers zéro et de l'ordre de $\frac{1}{V_0}$.

Lorsque les variables ξ, τ, ξ', τ' sont toutes moindres que b et que t positif est moindre que la quantité positive $\frac{A-b}{V_0}$, nous pourrons prendre, comme limite supérieure des modules des seconds membres des équations (3), une expression M de la forme

$$M = KV_0 b + P,$$

du moins lorsque V_0 est suffisamment grand, K et P désignant deux nombres positifs définis par les domaines Ω, Δ, D . Soit alors T la plus petite des quantités

$$\frac{A-b}{V_0}, \quad \frac{b}{M}$$

et supposons enfin que les composantes Q_u, Q_v admettent des dérivées partielles du premier ordre, continues dans le domaine Δ .

La méthode des approximations successives de M. Picard, modifiée par M. Lindelöf, nous apprend que les intégrales du système (3) seront pour $t < T$ toutes moindres que b .

Ici, on distinguera deux cas :

Premier cas : $A < \frac{1}{K}$. Alors, en posant $\frac{P}{b} = \left(\frac{1}{A} - K\right) V_0$, on voit qu'en faisant grandir indéfiniment V_0 , la trajectoire réelle diffère aussi peu qu'on veut de l'arc $M_0 M_2$ et à plus forte raison de l'arc $M_0 M_1$.

Deuxième cas : $A \geq \frac{1}{K}$. Soit N la partie entière du rapport $A : \frac{1}{K}$, j'envisage un domaine Θ compris dans le domaine Δ , domaine limité par les géodésiques $v = -\beta, v = \beta$; et, par les courbes $u = u_0, u = A + u_0 \equiv u_2$.

L'arc $M_0 M_2$ sera comme le diamètre de ce trapèze.

Je partagerai ce trapèze en $(2N + 1)$ autres trapèzes par $2N$ valeurs de u équidistantes de u_0 et de u_2 et je partagerai la durée $\frac{A}{V_0}$ en $(2N + 1)$ durées partielles égales.

Le premier arc de la trajectoire correspondant à cette première durée rentre évidemment dans le premier cas; pour étudier le second arc, on prendra *provisoirement* des coordonnées polaires dont le pôle O' est la projection géodésique de O sur la tangente

géodésique à l'extrémité μ_1 du premier arc de la trajectoire, et ainsi de suite.

Les propriétés des triangles géodésiques permettent aisément de *raccorder* ces divers systèmes de coordonnées, à l'aide desquelles chaque arc partiel rentrera dans le premier cas pourvu que b soit suffisamment petit [on prendra $(2N + 1)b$ notablement plus petit que β].

En revenant aux coordonnées fixes u et v , et faisant tendre β vers zéro, et désignant par (β) une petite quantité de l'ordre de β , on voit qu'à tous les instants compris entre les époques 0 et $\frac{A}{V_0}$, sauf peut-être aux époques $\frac{A}{V_0}[1 - (\beta)]$, les écarts entre les coordonnées du mobile sur lequel agit la force et les coordonnées du mobile libre qui partirait de M_0 avec la même vitesse *initiale* sont eux-mêmes de l'ordre de β .

Le théorème énoncé est donc démontré, sinon pour l'arc OM_2 , du moins pour l'arc OM_1 qui y est contenu.

IV. Au théorème précédent je rattacherai des considérations qui touchent d'assez près la question de la stabilité.

Considérons sur une surface un domaine Δ limité par un contour simple. Nous dirons que le domaine est *ouvert*, si ce domaine ne contient aucune géodésique qui y serait fermée et si l'on peut assigner un maximum aux arcs géodésiques qui traversent Δ .

Nous dirons encore que le domaine Δ est régulier s'il est compris dans un domaine D dans lequel nous puissions tracer un domaine Ω qui entoure Δ , de manière que les conditions énoncées au paragraphe II soient satisfaites.

La remarque que j'avais en vue peut alors s'énoncer ainsi :

Si un mobile soumis à une force finie et assujetti à demeurer sur une surface demeure confiné sur un domaine D régulier et ouvert, l'énergie cinétique du mobile restera nécessairement limitée.

La force, bien entendu, est fonction de la position du mobile, mais ne dérive pas d'une fonction des forces; car, dans ce cas, la remarque serait sans intérêt.

SUR LE THÉORÈME DES AIRES;

Par M. P. APPELL.

1. Imaginons un système sollicité par des forces extérieures telles que la somme de leurs moments par rapport à un axe fixe Oz soit nulle. Alors, si le système part du repos, la somme $\Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ reste nulle. Mais, malgré cette condition, si le système n'est pas rigide, il peut, par des déformations successives et sans subir de torsions, partir d'une configuration déterminée et revenir à une configuration identique, déduite de la première par une rotation autour de Oz . Je me propose d'abord d'en indiquer un exemple élémentaire au point de vue de l'enseignement, en renvoyant, pour des considérations générales, à des Notes de MM. Guyou et Maurice Lévy (*Comptes rendus*, 29 octobre 1894).

Soient une roue homogène, de centre O , mobile sans frottement sur un plan horizontal. $A_0 A'_0$ un diamètre invariablement lié à la roue. Aux points A_0, A'_0 sont placés sur la roue deux ouvriers de même masse m et aux points C_0, C'_0 situés sur le même diamètre, à égale distance de part et d'autre du centre O , sont placés deux autres ouvriers de masse μ . Le système est immobile. Cela posé, les ouvriers font la manœuvre suivante, composée de quatre phases :

1° Les ouvriers m se mettent à marcher sur la circonférence, dans le même sens de rotation, autour du centre en restant diamétralement opposés; ils s'arrêtent après avoir parcouru un quart de la circonférence de la roue : celle-ci tourne alors en sens contraire d'un angle α , puis s'arrête.

2° Les ouvriers μ se réunissent au centre : la roue ne bouge pas; mais le moment d'inertie par rapport à Oz diminue.

3° Les ouvriers m reviennent alors à leurs positions primitives sur la roue : celle-ci tourne en sens contraire de sa rotation précédente d'un angle *différent* β , puis s'arrête.

4° Les ouvriers μ se séparent et viennent occuper leurs positions primitives sur la roue, opération qui laisse la roue immobile.

Après ces mouvements, le système a repris la même configura-

tion, mais a tourné d'un certain angle $\beta - \alpha$. En les recommençant, les ouvriers arriveront donc à faire tourner le système d'un angle supérieur à tout angle donné.

Si l'on appelle a le rayon de la roue, $M k^2$ son moment d'inertie, c la distance de C_0 au centre, on a dans la première phase

$$2ma^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - (Mk^2 + 2\mu c^2)\alpha = 0$$

et dans la troisième, puisque c est alors nul,

$$2ma^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - Mk^2\beta = 0.$$

On voit donc que β est supérieur à α et l'on peut calculer $\beta - \alpha$.

II. Voici maintenant une remarque générale permettant de ramener à un même type tous les problèmes du genre de celui qui précède. J'ai indiqué sommairement cette remarque dans une Note des *Comptes rendus* (5 novembre 1894).

Soient un corps solide, mobile autour d'un axe fixe Oz , et des points de masses $m_1, m_2, \dots$ liés en quelque manière au corps solide et animés par rapport à ce corps de mouvements prescrits à l'avance; si donc on appelle $r_1, \theta_1, z_1; r_2, \theta_2, z_2; \dots$ les coordonnées semi-polaires des points $m_1, m_2, \dots$, par rapport à des axes Ox, Oy, Oz liés au corps solide, ces coordonnées sont des fonctions du temps données à l'avance. Supposons enfin que la somme N des moments des forces extérieures appliquées au système, par rapport à l'axe de rotation Oz , dépende uniquement de la position du corps solide et non des positions des points $m_1, m_2, \dots$ sur le corps.

Soit φ l'angle dont le corps a tourné, à partir d'une certaine position initiale, par exemple l'angle de Ox avec un axe fixe OX perpendiculaire à Oz , I son moment d'inertie par rapport à Oz : la somme des moments des quantités de mouvement des points du corps solide par rapport à Oz est $I \frac{d\varphi}{dt}$. D'autre part, les coordonnées semi-polaires absolues des points $m_1, m_2, \dots$, par rapport aux axes fixes Oz, OX et à un axe perpendiculaire OY , sont $r_1, \theta_1 + \varphi, z_1; r_2, \theta_2 + \varphi, z_2; \dots$; donc la somme des moments

de leurs quantités de mouvement absolues, par rapport à Oz , est

$$m_1 r_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) + m_2 r_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) + \dots$$

ou

$$\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \sum m r^2.$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué au système total donne donc

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\sum m r^2 + I \right) \right] = N,$$

équation qui donne φ en fonction de t , puisque N est supposé fonction de φ seul et que les r et les θ sont des fonctions données de t .

Cela posé, considérons un point ayant pour masse $M = \sum m$ et pour coordonnées semi-polaires R , Θ et Z , par rapport aux axes $Oxyz$ liés au corps solide, les quantités définies par les équations

$$(2) \quad MR^2 = \sum m r^2, \quad MR^2 d\Theta = \sum m r^2 d\theta, \quad MZ = \sum m z.$$

Comme $r_1, r_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$, sont des fonctions connues de t , R , Θ et Z seront aussi des fonctions connues de t , et le point M ainsi défini sera animé d'un mouvement connu dans le corps. Si l'on remplace tous les points $m_1, m_2, \dots$ par ce seul point M , en admettant que cette substitution n'altère pas la somme N des moments des forces par rapport à Oz , le mouvement du corps n'est pas changé. En effet, l'équation du nouveau mouvement est

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left[MR^2 \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} (R^2 + I) \right] = N,$$

identique à l'équation (1), en vertu des relations (2). On voit que la valeur Z ne joue ici aucun rôle; aussi pourrait-on la prendre arbitrairement en fonction de t , au lieu de la définir par la troisième des équations (2).

III. Voici quelques propriétés du point M ainsi défini. Imaginons un système d'axes $Oxyz$ et des points $m_1, m_2, \dots$ de coor-

données semi-polaires $r_1, \theta_1, z_1; r_2, \theta_2, z_2; \dots$, animés de mouvements connus; appelons *centre d'inertie* de ces points par rapport à l'axe Oz le point mobile de masse M dont les coordonnées semi-polaires R, Θ, Z sont définies en fonction de t par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} M = \sum m, & MR^2 = \sum m r^2, \\ MR^2 d\Theta = \sum m r^2 d\theta, & MZ = \sum m z; \end{cases}$$

l'angle polaire de ce point n'est déterminé qu'à une constante près; nous supposons, pour fixer les idées, que tous les θ s'annulent pour $t = 0$ et qu'il en soit de même de Θ . Nous voyons alors que ce point possède des propriétés analogues à celles du centre de gravité. Ainsi, la position du centre d'inertie de tous les points, au temps t , n'est pas changée, si l'on remplace d'abord quelques-uns des points par leur centre d'inertie.

On peut alors énoncer le résultat précédent en disant que :

Si, dans le problème général du n° II, l'on remplace plusieurs points $m_1, m_2, \dots$ par leur centre d'inertie par rapport à Oz , ce point étant calculé dans le mouvement relatif par rapport au solide, le mouvement du reste du système n'est pas altéré, pourvu que cette substitution n'altère pas N .

Par exemple, si l'axe Oz est vertical et si les seules forces extérieures sont des poids, $N = 0$, avant et après la substitution.

IV. Appliquons d'abord ces considérations à l'exemple I. Remplaçons les deux points m et μ , primitivement placés en A_0 et C_0 , par leur centre d'inertie M . En appelant r et θ les coordonnées polaires de m par rapport à la plaque, l'axe polaire étant OA_0 , et r_1, θ_1 celles de μ , on a, pour le centre d'inertie M ,

$$M = m + \mu, \quad MR^2 = m r^2 + \mu r_1^2, \quad MR^2 d\Theta = m r^2 d\theta + \mu r_1^2 d\theta_1.$$

Voyons quel est le mouvement de ce point sur la roue. Dans la première phase, $r = 0, r_1 = c, \theta_1 = 0, \theta$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc

M décrit un arc de cercle de centre O , de rayon $\sqrt{\frac{m a^2 + \mu c^2}{m + \mu}}$,

et d'angle au centre $\lambda = \frac{ma^2}{ma^2 + \mu c^2} \frac{\pi}{2}$. Dans la deuxième phase, $r = a$, r_1 varie de c à 0 , θ est égal à λ et θ_1 à 0 . Donc Θ reste constant et égal à λ , R diminue jusqu'à $\sqrt{\frac{ma^2}{m + \mu}}$; le centre d'inertie M décrit une portion de rayon. Dans la troisième phase, R reste constant, r est égal à a , r_1 à 0 , $d\theta_1$ est nul, θ diminue de $\frac{\pi}{2}$ à 0 ; donc Θ diminue de λ à 0 . Enfin, dans la quatrième phase, Θ est nul, R augmente de $\sqrt{\frac{ma^2}{m + \mu}}$ à $\sqrt{\frac{ma^2 + \mu c^2}{m + \mu}}$.

En définitive, le point M décrit une courbe fermée composée de deux portions de rayons de la roue et de deux arcs de cercle concentriques à la roue.

On peut de même remplacer les deux ouvriers symétriques m et μ placés primitivement en A_0 et C_0 par un point M' de même masse que M symétrique de M par rapport au centre. Le mouvement de la roue est le même sous l'action de ces deux points M et M' que sous l'action des quatre points primitifs.

Si la roue était assujettie à tourner autour d'un axe vertical fixe réalisé matériellement, il n'y aurait plus à se préoccuper de la symétrie des points qui a pour but de maintenir le centre de gravité fixe; on pourrait alors remplacer les quatre points par leur centre d'inertie, c'est-à-dire par un seul point décrivant une courbe fermée sur la roue. On vérifiera facilement que cette courbe est homothétique, par rapport au centre O , de celle que décrit le point M .

V. Imaginons un observateur tombant verticalement dans le vide et supposons qu'il veuille tourner autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité. Il pourra faire jouer à ses bras étendus symétriquement le rôle des ouvriers m dans la roue I et à ses jambes, plus ou moins écartées, celui des ouvriers μ .

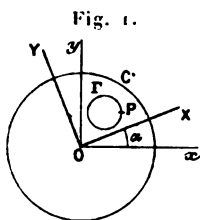
Dans ces conditions, le mouvement du tronc regardé comme rigide sera le même que si le mouvement de chaque bras et de chaque jambe était remplacé par celui de son centre d'inertie par rapport à l'axe vertical mené par le centre de gravité. L'identité est donc complète entre cette question et le problème élémentaire résolu dans le n° I.

On pourrait même remplacer le mouvement du bras et de la jambe droits par celui de leur centre d'inertie, et le mouvement des membres symétriques par celui de leur centre d'inertie symétrique du premier. On aurait ainsi un système analogue au système IV et à celui que MM. Marcel Deprez et Picard ont construit. (Voyez *Comptes rendus*, 5 novembre 1894.)

SUR LA ROTATION D'UN SYSTÈME DÉFORMABLE ;

Par M. ÉMILE PICARD.

A la suite des expériences de M. Marey sur la chute d'un chat, la question de la rotation d'un système déformable s'est trouvée mise à l'étude. Il était intéressant de donner un exemple d'un système, partant du repos, pouvant, par le seul travail des forces intérieures, tourner d'un angle quelconque autour de son centre de gravité, tous ses points se retrouvant à la fin de la rotation dans les positions relatives qu'ils occupaient primitivement. Parmi les exemples très nombreux que l'on peut citer, il n'y en a point, ce me semble, de plus simple que celui que je communiquai à M. Marcel Deprez et d'où il déduisit un petit appareil qu'il fit fonctionner récemment devant l'Académie (¹).



Considérons un disque matériel C, mobile autour d'un axe vertical O. Sur le disque C on a tracé une courbe fermée Γ . Un point matériel P est placé en un point de Γ et tout le système est pri-

(¹) MARCEL DEPREZ, *Sur un appareil servant à mettre en évidence certaines conséquences du théorème des aires* (*Comptes rendus*, 5 novembre 1894). Voir aussi, dans le numéro précédent des *Comptes rendus*, deux Communications de M. GUYOU et de M. MAURICE LÉVY. On trouvera aussi un article de M. APPELL dans le numéro du 5 novembre.

mitivement en repos. Supposons maintenant que le point P se meuve sur Γ suivant une loi arbitrairement donnée, de façon à revenir à sa position initiale après avoir décrit la courbe Γ tout entière; à ce moment, le disque C aura tourné d'un certain angle, et les différentes parties du système formé par le disque et le point matériel auront repris leurs mêmes positions relatives. Nous avons donc là un exemple du phénomène cherché.

Proposons-nous de trouver l'expression de l'angle dont a tourné le système. Nous représenterons par OX et OY deux axes rectangulaires invariablement liés au disque C et à la courbe Γ , et nous désignerons par Ox et Oy deux axes fixes dans le plan horizontal. Les deux coordonnées X et Y du point P seront des fonctions données du temps correspondant au déplacement de P sur Γ . Si α désigne l'angle xOX, nous aurons, en appliquant le théorème des aires et tenant compte de ce qu'au début le système est au repos,

$$MK^2 \frac{d\alpha}{dt} + m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

où MK^2 désigne le moment d'inertie du disque par rapport à O; m représente la masse de P, et l'on a

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient de suite

$$[MK^2 + m(X^2 + Y^2)] \frac{d\alpha}{dt} + m \left(X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} \right) = 0,$$

ou encore

$$d\alpha = -m \frac{X dY - Y dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)}$$

et, par suite, on aura pour l'angle total Ω dont a tourné le disque

$$\Omega = -m \int_{\Gamma} \frac{X dY - Y dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)},$$

l'intégrale qui figure dans le second membre étant une intégrale curviligne prise le long de la courbe Γ .

Un cas particulièrement simple sera celui où Γ se composerait

d'un arc de cercle AB de centre O et des deux rayons OA et OB. Si R désigne le rayon de l'arc AB et ω l'ouverture de son angle au centre, on aura, d'après la formule précédente et en supposant AB parcouru dans le sens de OX vers OY,

$$\dot{\Omega} = - \frac{m R^2}{M K^2 + m R^2} \omega.$$

Afin d'éviter d'avoir un axe vertical rigide qui pratiquement aurait toujours quelque frottement dans ses supports, M. Marcel Deprez associe à la courbe Γ une seconde courbe Γ' symétrique de la première par rapport au point O et sur laquelle se meut un point P' symétrique de P. Le centre de gravité de tout le système est alors toujours au point O et il suffit d'employer, comme axe de rotation, un fil sans torsion.

On peut donner, théoriquement au moins, une autre forme à l'expérience précédente. Imaginons un homme debout sur un plan parfaitement poli et ayant les pieds en O; il étend les bras et fait décrire à ses mains deux courbes Γ et Γ' dans un plan horizontal, de la même façon que P et P' décrivaient précédemment leurs courbes respectives. Notre individu pourra, de cette manière, prendre un mouvement continu de rotation.

ABaque EN POINTS ISOPLÈTHES DE L'ÉQUATION DE KÉPLER;

Par M. M. D'OCAGNE.

1. Si l'on met l'équation de Képler

$$(1) \quad u - e \sin u = nt$$

sous la forme

$$\frac{1}{n} u - \frac{1}{n} e \sin u = t,$$

elle rentre dans le type général envisagé dans les §§ 2 et 3 de ma Note sur l'*Abaque général de la Trigonométrie sphérique* (1).

Appliquant les formules (3), (4) et (5) données à l'endroit cité,

(1) *Bulletin astronomique*, p. 5; 1894.

on voit donc que l'équation est représentable par un abaque ainsi constitué :

1° Le système de points simplement isoplèthes (t) défini par

$$(2) \quad x = t, \quad y = 0;$$

2° Le système de points simplement isoplèthes (e) défini par

$$(3) \quad x = e, \quad y = 1;$$

3° Le système de points doublement isoplèthes (u, n) défini par

$$(4) \quad x = \frac{u}{n + \sin u}, \quad y = \frac{\sin u}{n + \sin u}.$$

Pour avoir les isoplèthes (u) et (n), formant par leur ensemble ce dernier système, éliminons d'abord n entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$(5) \quad y = \frac{\sin u}{u} x.$$

Les isoplèthes (u) sont donc des droites passant par l'origine. Pour éliminer maintenant u , écrivons ces deux équations

$$nx + x \sin u = u, \quad ny + (y - 1) \sin u = 0,$$

et ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $(1 - y)$ et x , ce qui donne

$$nx = u(1 - y).$$

Portant la valeur de u tirée de là dans la seconde des équations précédentes, on obtient pour les isoplèthes (n) l'équation

$$(6) \quad ny + (y - 1) \sin \frac{nx}{1 - y} = 0.$$

Les équations (2), (3), (5) et (6) définissent complètement l'abaque demandé.

J'ai tenu à signaler cette solution, *théoriquement* la plus satisfaisante, pour montrer un nouvel exemple d'application du principe qui m'a servi à construire l'abaque général de la Trigonométrie sphérique. Mais il vaut mieux, *en pratique*, éviter le tracé des courbes (n) définies par l'équation (6), en adoptant la solution suivante.

2. Posant $nt = \theta$, considérons l'équation sous la forme

$$u - e \sin u = 0.$$

Écrivons-la

$$\theta + e \sin u - u = 0$$

et prenons θ et e pour des coordonnées parallèles de droite, U et V.

Nous aurons alors pour premiers systèmes d'isoplèthes (θ) et (e) les points

$$(7) \quad U = \theta \quad \text{et} \quad V = e,$$

constituant des graduations naturelles respectivement sur l'axe des U et sur l'axe des V.

Le troisième système d'isoplèthes (u) sera dès lors donné par l'équation

$$U + V \sin u - u = 0,$$

qui représente, pour chaque valeur de u , un point dont les coordonnées, rapportées à un axe des x confondu avec l'axe des origines et à un axe des y équidistant de ceux des U et des V, sont, en représentant par $2a$ l'écartement de ces deux derniers ⁽¹⁾,

$$(8) \quad x = -a \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}, \quad y = \frac{u}{1 + \sin u}.$$

Les formules (7) et (8) définissent complètement notre nouvel abaque.

3. Ici se place une première remarque importante au point de vue de la construction de l'abaque.

La variable u croît de 0 à 2π . Or, lorsqu'elle croît de 0 à π , x reste compris entre $-a$ et 0; mais, lorsqu'elle croît de π à 2π , x devient infini pour $u = \frac{3\pi}{2}$. Les points isoplèthes (u) s'étendraient donc jusqu'à l'infini, ce qui est *pratiquement* inacceptable. Afin d'éviter cet inconvénient majeur, j'aurai recours à l'artifice que j'ai déjà employé dans mon livre pour l'abaque de la distance sphérique ⁽²⁾.

Pour les valeurs de u supérieures à π , posons

$$(9) \quad U = \theta, \quad V = -e.$$

⁽¹⁾ *Nomographie*, p. 53.

⁽²⁾ *Nomographie*. Note au bas de la page 84.

Il vient alors pour les points isoplèthes (u) l'équation

$$U - V \sin u - u = 0,$$

qui donne, en coordonnées cartésiennes,

$$(10) \quad x = -a \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}, \quad y = \frac{u}{1 - \sin u}.$$

Cette nouvelle valeur de x reste finie lorsque u varie de π à 2π . De cette façon, tous les points isoplèthes (u) sont à distance finie. Seulement à la variable e correspondent deux graduations : l'une, portée dans le sens positif, sert lorsque $u < \pi$, c'est-à-dire $\theta < \pi$; l'autre, portée dans le sens négatif, lorsque $u > \pi$ ou $\theta > \pi$.

4. Voici maintenant, à propos de la construction de l'abaque, une autre remarque non moins importante au point de vue *pratique*.

Tandis que la variable θ varie de 0 à $2\pi = 6,283, \dots$, la variable e reste comprise entre 0,01 et 0,4. Cela conduirait à avoir sur l'axe des U une échelle seize fois plus développée environ que celle qui serait portée par l'axe des V .

Pour obvier à cet inconvénient, posons $e = \frac{e'}{10}$ et construisons l'abaque de l'équation

$$u - e' \frac{\sin u}{10} = \theta,$$

défini, d'après ce qui précède, par les formules

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \theta, \\ x = -a \frac{10 - \sin u}{10 + \sin u}, \end{array} \quad \begin{array}{l} V = e' \\ y = \frac{10 u}{10 + \sin u} \end{array} \right\} \text{ pour } u < \pi,$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \theta, \\ x = -a \frac{10 + \sin u}{10 - \sin u}, \end{array} \quad \begin{array}{l} V = -e' \\ y = \frac{10 u}{10 - \sin u} \end{array} \right\} \text{ pour } u > \pi;$$

puis, cet abaque une fois construit, graduons l'échelle des points (e') au moyen des valeurs correspondantes de e .

On peut remarquer qu'ici la transformation employée précédemment pour éviter les points à l'infini et qui a donné naissance aux formules du second groupe n'est plus nécessaire, puisque le dénominateur des valeurs de x et de y dans le premier groupe ne peut plus s'annuler.

Il vaut mieux néanmoins continuer à en faire usage pour la raison que voici : la valeur de l'inconnue u est donnée par le point où la droite qui joint le point coté θ au point coté e coupe la courbe graduée au moyen des valeurs de u . Au point de vue de la précision, il est préférable que ce point de rencontre se trouve *entre* les points servant à déterminer la droite indicatrice de la lecture. Or, la transformation susmentionnée a précisément pour effet de faire rentrer tous les points (u) entre l'axe des U et l'axe des V .

5. Pour obtenir l'abaque en points simplement isoplèthes qui vient d'être décrit, nous avons dû prendre le produit nt pour un argument que nous avons appelé θ ; mais rien n'est plus facile que d'éviter de faire ce produit en complétant l'abaque de la façon suivante. Formons l'abaque du produit

$$\theta = nt$$

en posant

$$U = \theta, \quad V = -n,$$

ce qui donne pour isoplèthes (t)

$$U + tV = 0,$$

ou

$$x = a \frac{t-1}{t+1}, \quad y = 0.$$

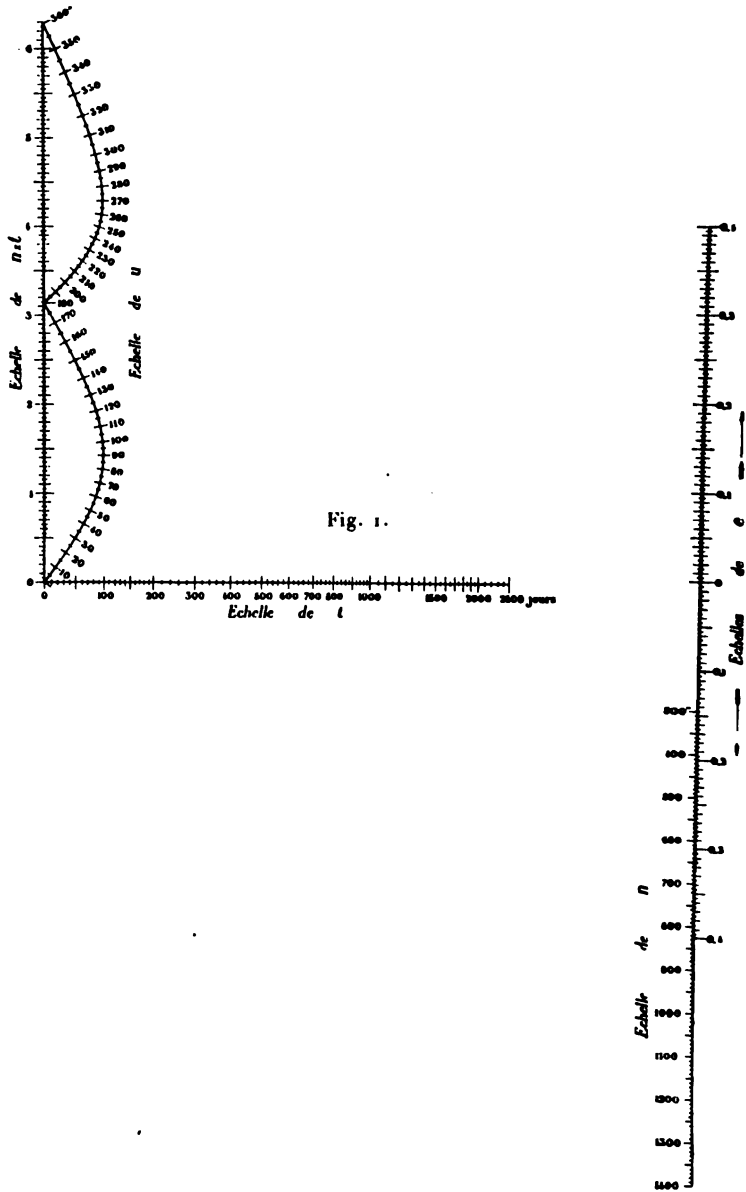
Comme n reste compris entre 0,0025 et 0,006, tandis que t varie de 0 à 2500, nous coterons encore ici, *pour la construction de l'abaque*, les variables $t' = \frac{t}{1000}$ et $n' = 1000n$ aux variables t et n , et nous coterons les points (t') et (n') respectivement au moyen des valeurs de t et de n , ces dernières étant même, pour plus de commodité, exprimées en secondes.

L'abaque complémentaire ainsi construit peut, sans nul inconvénient, être superposé au premier, les échelles (θ) de l'un et de l'autre, qui sont semblables, étant mises en coïncidence.

C'est de cette façon qu'a été obtenu l'abaque représenté par la fig. 1. Son mode d'emploi peut se résumer ainsi :

Une droite (trait sur un transparent ou fil tendu) passant par le point coté n sur l'échelle verticale de droite est amenée

à passer par le point coté t sur l'échelle horizontale. On la fait



ensuite pivoter autour du point 0 où elle coupe l'échelle verti-

cale de gauche, jusqu'à ce qu'elle passe par le point coté e sur l'échelle verticale de droite, dans sa partie supérieure si le point θ est sous l'arc inférieur de la courbe, dans sa partie inférieure si le point θ est sous l'arc supérieur. On n'a plus qu'à lire la cote du point où cette courbe est alors coupée par la droite.

6. Si l'on ne tient pas à effectuer le produit $\theta = nt$ sur l'abaque même, c'est-à-dire si l'on conserve θ comme entrée, on peut réduire notablement encore le Tableau de la manière suivante :

Considérons la seconde partie de l'abaque, celle qui correspond aux valeurs de u supérieures à π . Elle comprend l'échelle inférieure de droite pour la variable e , la moitié supérieure de l'échelle de gauche pour la variable θ , la courbe supérieure pour la variable u .

Supposons menée la droite qui joint le point coté 0 de l'échelle de droite au point coté π de l'échelle de gauche, et prenons la figure symétrique oblique de l'ensemble qui vient d'être définie par rapport à cette droite, la symétrie ayant lieu parallèlement aux axes des U et des V .

Dans ces conditions, l'échelle inférieure de e vient coïncider exactement avec l'échelle supérieure de la même variable; la partie supérieure (de π à 2π) de l'échelle de θ se rabat sur la partie inférieure (de 0 à π), le point de cote θ_0 venant en coïncidence avec celui de cote $2\pi - \theta_0$. Je dis qu'il en est de même pour l'échelle curviligne correspondant à u .

Soient, en effet, les valeurs $u_0 < \pi$ et $2\pi - u_0 > \pi$. Les formules (11) donnent pour le point (u_0) les coordonnées

$$x_0 = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \quad y_0 = \frac{10 u_0}{10 + \sin u_0},$$

et les formules (12), pour le point ($2\pi - u_0$),

$$x_1 = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \quad y_1 = \frac{10(2\pi - u_0)}{10 + \sin u_0}.$$

Ces deux points, ayant même abscisse, sont sur une parallèle aux axes des U et des V . D'autre part, le point milieu de leur intervalle a pour ordonnée

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{10\pi}{10 + \sin u_0}.$$

Son abscisse étant

$$x = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0},$$

on voit, par l'élimination de $\sin u_0$, qu'il se trouve sur la droite

$$\pi x + 2ay = a\pi,$$

qui est celle joignant le point $e = 0 (x = a, y = 0)$ au point $\theta = \pi (x = -a, y = \pi)$.

La transformation indiquée a donc bien pour effet d'amener le point de cote $2\pi - u_0$ en coïncidence avec le point de cote u_0 .

L'abaque se trouve ainsi réduit à la *fig. 2*.

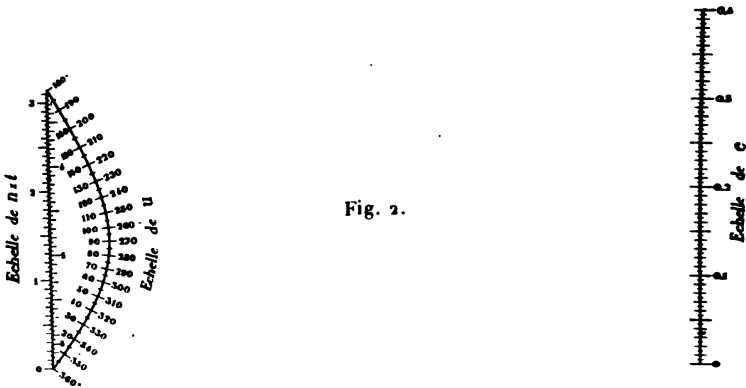


Fig. 2.

Son emploi consiste simplement en ceci :

Joindre par une droite le point coté e sur l'échelle de droite au point coté θ sur l'échelle de gauche. Suivant que θ est plus petit ou plus grand que π , lire, au point où cette droite coupe l'échelle curviligne, la valeur de u plus petite ou plus grande que π .

Il est bien évident que pour obtenir, avec un tel abaque, le degré de précision requis par les besoins de l'Astronomie, il serait nécessaire de lui donner des dimensions qui rendraient son emploi peu pratique. Il permettra en tout cas d'obtenir rapidement une valeur approchée de l'inconnue, et supprimera ainsi tout tâtonnement dans l'application des méthodes connues d'approximation.

**SUR L'ÉQUATION D'EULER
ET SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;**

Par M. PAUL ADAM.

L'équation d'Euler s'est présentée dans diverses questions de Géométrie qui ont permis d'en donner des solutions *géométriques*.

Lagrange, par exemple, a intégré cette équation en partant du triangle sphérique; Jacobi, par la considération d'un système de deux cercles, en a fait connaître la solution sous une forme trigonométrique très simple; plus récemment, M. Darboux ⁽¹⁾ a obtenu une forme géométrique nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler en prenant une famille d'ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers; M. Darboux a donné en même temps une nouvelle méthode très ingénieuse pour l'intégration de cette équation différentielle par l'analyse.

Je vais indiquer, dans cette Note, un autre procédé d'intégration géométrique de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'ellipsoïde, et faire connaître une propriété remarquable des lignes de courbure d'une famille d'ellipsoïdes convenablement choisie.

En prenant, pour les coordonnées curvilignes d'une surface réelle, les paramètres imaginaires conjugués α et β des génératrices rectilignes de la sphère, dans la représentation sphérique faite à la manière de Gauss, cette surface a pour équation tangentielle

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0,$$

ξ désignant une certaine fonction de α et de β , et ses lignes de courbure sont définies par l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} d\beta^2.$$

S'il s'agit de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

⁽¹⁾ *Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques (Annales de l'École Normale, 1^{re} série, t. IV ; 1867).*

la fonction ξ et les coordonnées x, y, z de la surface se calculent, en fonction de α et de β , au moyen des équations

$$\frac{\alpha + \beta}{\frac{x}{a^2}} = \frac{i(\beta - \alpha)}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\alpha\beta - 1}{\frac{z}{c^2}} = -\xi,$$

et il vient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{a^2(\alpha + \beta)^2 - b^2(\beta - \alpha)^2 + c^2(\alpha\beta - 1)^2}, \\ x^2, y^2, z^2 = \frac{a^4(\alpha + \beta)^2, -b^4(\beta - \alpha)^2, c^4(\alpha\beta - 1)^2}{\xi^2}. \end{array} \right.$$

En faisant l'hypothèse habituelle $a > b > c$, et en posant

$$(3) \quad \frac{a^2(b^2 - c^2) + b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} = m^2,$$

m^2 étant une quantité supérieure à l'unité, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, on trouve, d'après l'équation (1), que les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont définies, dans le système (α, β) , par l'équation

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - 2m^2\alpha^2 + 1}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^4 - 2m^2\beta^2 + 1}}.$$

Appelons j et k les deux racines réelles et positives du trinôme $t^2 - 2m^2t + 1$, j étant la plus grande, de sorte que

$$j = m^2 + \sqrt{m^4 - 1}, \quad k = m^2 - \sqrt{m^4 - 1};$$

il suffit de poser

$$\alpha = x\sqrt{k}, \quad \beta = y\sqrt{k},$$

pour ramener l'équation (4) à la forme que lui a donnée Euler

$$(5) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

D'après cela, si l'on possède, sous forme finie, entre x et y , l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde, cette équation sera l'intégrale de (5).

Or les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont situées sur les

surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0;$$

en vertu des relations (2), α et β doivent donc vérifier, le long de ces lignes de courbure, l'équation

$$(6) \quad \frac{a^2(\alpha + \beta)^2}{a^2 + \lambda} - \frac{b^2(\beta - \alpha)^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2(\alpha\beta - 1)^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

de sorte que l'intégrale de l'équation (5) d'Euler revêt la forme nouvelle suivante :

$$(7) \quad \frac{a^2 k(x + y)^2}{a^2 + \lambda} - \frac{b^2 k(y - x)^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2(kxy - 1)^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

λ désignant la constante arbitraire.

Ce résultat (7) appelle de suite une remarque qui nous permettra tout à l'heure d'énoncer un théorème : (7) est l'intégrale de l'équation d'Euler *en donnant à a^2 , b^2 , c^2 des valeurs assujetties à la seule condition (3)*, laquelle s'écrit, en introduisant k à la place de m ,

$$\frac{a^2(b^2 - c^2) + b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} = \frac{k^2 + 1}{2k},$$

ou encore

$$(8) \quad \frac{(1 - k)^2}{a^2} - \frac{(1 + k)^2}{b^2} + \frac{4k}{c^2} = 0;$$

l'équation (7) doit donc pouvoir être mise sous forme d'une constante arbitraire égale à une fonction ne dépendant que de x , y et k . Le calcul montre en effet que l'expression

$$\frac{1}{c^2(a^2 - b^2)} \left[\frac{2a^2 b^2 c^2}{\lambda} + c^2(a^2 + b^2) \right]$$

(qui n'est autre qu'une constante arbitraire) tirée de (7) ne contient que x , y et λ .

De même que l'équation (7), l'équation (6) ne contient au fond que α , β , k et une constante arbitraire μ , lorsque a^2 , b^2 et c^2 sont liés par la relation (8); cela veut dire que l'équation (6) constitue toujours la même relation entre α et β lorsque a^2 , b^2 et c^2 varient

en satisfaisant à (8), où k est regardé comme une constante.

Géométriquement, ce fait se traduit de la manière suivante : les plans tangents aux ellipsoïdes dont les axes sont liés par la relation (8), où k est une constante, sont parallèles quand on se déplace le long des lignes de courbure qui correspondent sur ces surfaces à une même valeur de μ .

On peut supposer que le grand axe $2a$ soit le même pour tous ces ellipsoïdes ; alors la relation (8) montre que si b décroît de a à zéro, il en est de même de c , de sorte qu'on obtient une famille d'ellipsoïdes intérieurs les uns aux autres, partant de la sphère de rayon a pour se réduire à leur grand axe commun :

Sur ces ellipsoïdes, les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

Ce résultat est remarquable, car, si l'on se propose de chercher directement s'il existe une telle famille d'ellipsoïdes, les équations du problème ne montrent pas immédiatement la possibilité d'une solution.

Tous les résultats ci-dessus s'étendent évidemment aux deux hyperboloïdes.

Les deux paraboloides permettent aussi d'obtenir une forme nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler.

SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION ET SUR LA RÉDUCTION DES SINGULARITÉS D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE;

Par M. E. VESSIOT.

1. Il est naturel de chercher à généraliser la méthode de transformation des figures par projection, en prenant comme projetantes les droites d'une congruence quelconque. Si l'on veut de plus que par un point arbitraire ne passe qu'une seule projetante, cette congruence devra être du premier ordre; et l'on obtiendra la plus simple ⁽¹⁾ de ces méthodes de projection, en employant une con-

⁽¹⁾ Il en existe évidemment une infinité; on peut prendre, par exemple, pour projetantes les droites qui s'appuient sur une conique et une droite qui la rencontre, ou sur une cubique gauche et une de ses cordes.

gruence linéaire. C'est de cette méthode que nous voulons dire ici quelques mots; nous lui donnerons, pour abrégé, le nom de *projection* ou *perspective quadratique*. Elle correspond en effet, comme nous allons le montrer, à la transformation quadratique birationnelle des figures planes, de même que la projection conique, ou perspective linéaire, qui en est visiblement un cas singulier, correspond à la transformation homographique, ou linéaire, des figures planes.

Soit d'abord une congruence linéaire générale, c'est-à-dire ayant deux directrices rectilignes A et B, ne se rencontrant pas; et soient deux plans quelconques de l'espace, P et P'. Les droites de la congruence établissent une correspondance birationnelle ⁽¹⁾ entre les points de ces deux plans; je dis que cette correspondance est quadratique. Soit, en effet, D une droite du plan P, par exemple. Les projetantes des divers points de cette droite, dans notre perspective quadratique, engendrent la surface du second degré, qui contient A, B et D. La perspective de D est la section de cette quadrique par le plan P'; c'est donc une conique: la transformation est donc bien du second degré. Les *points principaux* sont, dans le plan P' par exemple, les points α' , β' , où A et B percent ce plan, et le point γ' où l'intersection Δ des deux plans est rencontrée par la droite qui joint les pieds α et β de A et de B dans le plan P. Ce sont de même dans le plan P les points α , β , et le point γ où la droite $\alpha'\beta'$ rencontre Δ . Enfin les points de Δ sont à eux-mêmes leurs homologues.

Dans le cas où l'une des directrices de la congruence, A par exemple, rencontre Δ , les quatre points α , γ , α' , γ' sont réunis en un seul ω . Alors les coniques C' qui correspondent, par exemple, aux droites D du plan P, passent en β' , en ω , et ont même tangente en ω ; car le plan (βA) est tangent en ω à toutes les quadriques lieux des projetantes des points des droites D, et sa trace $\omega T'$ sur le plan P' est, par suite, tangente à toutes les coniques C'.

Si A et B rencontrent toutes deux Δ , on voit sans peine que la transformation s'abaisse au premier degré.

Supposons maintenant que la congruence ait deux directrices

⁽¹⁾ Ce cas a été étudié, sous le nom de *projection gauche*, par STEINER et plus tard par TRANSON.

rectilignes confondues en une seule A . Les quadriques précédentes se raccordent alors le long de A . Soient encore α et α' les points où A perce respectivement P et P' , et γ , γ' les points où Δ est rencontrée par les plans tangents communs aux points α' et α respectivement. Les coniques C' , homologues des droites D , passent en α' , γ et ont $\alpha'\gamma$ pour tangente commune au point α' .

Si A rencontre Δ , α , α' , γ , γ' se confondent en un seul point ω , et deux des coniques C' , n'ayant qu'un point commun en dehors de ω , y ont un contact du second ordre; la tangente commune est encore l'intersection de P' et du plan Π tangent en ω à toutes les quadriques précédemment considérées.

Enfin, si ce plan Π passe par Δ , la transformation s'abaisse encore au premier degré.

2. Nous venons de retrouver les trois types, bien connus, de la transformation birationnelle du second degré. Il nous reste à faire voir, ce qui est presque évident, que nous les avons avec toute la généralité possible. D'une manière plus précise, nous allons prouver que :

Toute transformation birationnelle du second degré s'obtient par une perspective quadratique associée à une perspective linéaire.

Supposons d'abord une transformation birationnelle de deux plans P et P' , avec trois points principaux distincts, α , β , γ pour le premier, α' , β' , γ' pour le second. A une droite Δ de P , passant par γ , correspond dans P' une droite Δ' passant par γ' , et la correspondance des points des deux plans définit sur Δ et Δ' deux divisions homographiques. On peut toujours supposer que, par une perspective linéaire appliquée à l'un des plans, on a fait en sorte que ces deux divisions soient superposables. Plaçons donc le plan P' de manière que Δ' vienne sur Δ et que les deux divisions coïncident effectivement point par point. Soient alors m et m' deux points quelconques homologues de P et P' . Les droites homologues αm et $\alpha' m'$ se coupent sur Δ (confondue avec Δ'), et par suite la droite mm' de l'espace rencontre la droite $\alpha\alpha'$; de même elle rencontre $\beta\beta'$. On a donc bien affaire à une perspective quadratique.

Soit, en second lieu, une transformation quadratique bira-

nelle du second type. Aux droites D du plan P correspondent, dans le plan P' , des coniques C' ayant deux points fixes α' , β' , et ayant en α' une même tangente $\alpha'T'$. De même, aux droites D' de P' correspondent dans P des coniques C ayant deux points fixes α , β et ayant en α une même tangente αT . A une droite Δ passant par α correspond une droite Δ' passant par α' , et l'on a, sur ces deux droites, deux divisions homographiques où α et α' sont homologues. Comme dans le cas précédent, on peut supposer que Δ' coïncide avec Δ , de manière que ces deux divisions coïncident : α et α' en particulier sont confondus en un même point ω de Δ (confondue avec Δ'). Soient alors m et m' deux points homologues quelconques. Les deux droites βm , $\beta' m'$ sont aussi homologues et se coupent par suite sur Δ en un point λ ; donc mm' rencontre $\beta\beta'$. De plus, si l'on désigne par b et b' les points d'intersection respectifs de βm et αT (c'est-à-dire ωT), et de $\beta' m'$ et $\alpha'T'$ (c'est-à-dire $\omega T'$), β est l'homologue de b' et β' celui de b . Les deux divisions homographiques déterminées sur βm et $\beta' m'$ par la correspondance des deux plans ayant un point commun, le point λ , les droites mm' , $\beta b'$, et $\beta' b$ passent par un même point, c'est-à-dire que mm' rencontre l'intersection des deux plans ($\beta\omega T'$), et ($\beta'\omega T$). On a donc bien encore une perspective quadratique.

On peut aussi supposer que l'on a amené β et β' sur l'intersection Δ des deux plans, et que les points de cette droite sont à eux-mêmes leurs homologues. Alors deux rayons homologues αm , $\alpha' m'$ se coupent en λ sur Δ , et si m décrit $\alpha\lambda$, m' se déplace sur $\alpha'\lambda$ de façon que mm' va toujours couper $\alpha\alpha'$ au même point λ_1 . A tout point λ correspond ainsi un point λ_1 et un seul. D'autre part, si p et p' sont deux points homologues non situés dans le plan ($\alpha\lambda\alpha'$), la droite pp' ne passe pas par λ_1 ; sans quoi les droites pm et $p' m'$ se couperaient sur Δ , et, ayant trois points homologues deux à deux, seraient homologues l'une de l'autre; ce qui est impossible, pm par exemple ne passant ni en α ni en β . Donc à un point λ , ne correspond aussi qu'un point λ_1 , et il y a correspondance homographique entre les points λ et λ_1 , ou, si l'on veut, entre les plans ($\alpha\lambda\alpha'$) et les points λ_1 par où passent toutes les droites mm' contenues dans l'un de ces plans. C'est dire que la transformation considérée est une perspective quadratique ayant pour directrice rectiligne double la droite $\alpha\alpha'$.

Reste le cas où les trois points principaux de la transformation sont confondus. Aux droites de P correspondent dans P' des coniques ayant un contact du second ordre en un point α' ; aux droites de P' des coniques, situées dans P , et ayant en un point α un contact du second ordre. On peut encore supposer que α et α' coïncident en ω , et que les points de l'intersection Δ des deux plans sont à eux-mêmes leurs homologues. Soient alors m et m' deux points homologues quelconques; les droites ωm , $\omega m'$ sont homologues, et font partie de deux faisceaux homographiques plans, qui ont Δ pour rayon commun. Donc tous les plans ($m \omega m'$) passent par une même droite A . De plus, toutes les droites mm' situées dans un même plan passant par A vont couper cette droite en un même point λ_1 , et l'on verra, comme dans le cas précédent, qu'il y a correspondance homographique entre les plans passant par A et les points λ_1 . La proposition annoncée est dès lors entièrement démontrée.

3. Nous avons, dans ce qui précède, employé la transformation par *perspective quadratique* pour faire correspondre les points de deux plans. On peut s'en servir aussi pour établir une correspondance entre les points de figures quelconques dans l'espace, ou entre les points d'une figure plane et ceux d'une figure de l'espace. Nous allons montrer, à titre d'exemple, que l'on en déduit un moyen bien simple de *faire correspondre (birationnellement) à une courbe plane algébrique n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes une courbe algébrique gauche sans points singuliers* ⁽¹⁾.

Les raisonnements qui suivent reposent sur cette remarque d'Al-gèbre que, *étant données un nombre quelconque d'équations algébriques entre des indéterminées $u, v, w, h, \dots$,*

$$f_1(u, v, \dots) = 0, \quad f_2(u, v, \dots) = 0, \quad \dots, \quad f_p(u, v, \dots) = 0,$$

il existe toujours des valeurs de $u, v, w, h, \dots$ qui ne satisfont à aucune de ces équations, pourvu qu'aucune d'elles ne soit une identité. En effet, dans l'hypothèse contraire, le produit

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, une Note de M. POINCARÉ dans les *Comptes rendus de l'Académie* (3 juillet 1893).

$f_1 f_2 \dots f_p$ serait identiquement nul, sans qu'aucun de ses facteurs le soit.

Cela posé, soit

$$(C) \quad \zeta = 0, \quad f(\xi, \eta) = 0$$

une courbe algébrique plane n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes; et soit une congruence linéaire, ayant deux directrices rectilignes distinctes A et B, dont les pieds α, β dans le plan des xy ne soient pas sur la courbe C. Soit enfin un plan quelconque

$$(P) \quad P(x, y, z) = ux + vy + wz + h = 0.$$

Par chaque point $M(\xi, \eta)$ de C passe une droite D et une seule appartenant à la congruence : sur cette droite déterminons un point $R(x, y, z)$ par la condition

$$P(x, y, z) = \mu, \quad \mu = \frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Le lieu des points R est une courbe gauche G qui correspond ainsi point par point à C. Je dis qu'on peut disposer des indéterminées u, v, w, h de manière que G n'ait pas de points multiples. C'est ce qui résultera des remarques suivantes :

1° Le degré de G est $c + 2n$, n et c étant l'ordre et la classe de C. On le voit en coupant par le plan des xy ; on obtient d'abord les points situés sur $\alpha\beta$, au nombre de n et tous distincts, si α, β sont convenablement choisis, et si le plan P n'est pas parallèle à $\alpha\beta$. On a de plus les solutions du système

$$(K) \quad (ux + vy + h) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$(C) \quad f(x, y) = 0.$$

Il y a là n^2 nouveaux points, dont il faut défalquer un certain nombre, à cause des points multiples de C. Or un de ces points ne cesse d'être un point simple de K, à tangente distincte de celles de C, que pour des valeurs particulières de u, v, h , que nous écartons. Nous devons donc retrancher le même nombre de points que pour la détermination de la classe, c'est-à-dire $n(n-1) - c$.

Il reste donc un nombre de points égal à

$$n^2 - [n(n-1) - c] = c + n.$$

Et l'on a bien en tout $c + 2n$ points d'intersection, que l'on peut supposer tous distincts; de sorte que ce sont des points simples de la courbe gauche G .

2° Les directions asymptotiques de G sont distinctes. D'abord c de ces directions proviennent des valeurs infinies de μ , qui, par un choix convenable des axes de coordonnées, correspondent à des points M distincts. Deux d'entre elles ne seraient parallèles que si c'étaient des droites de la congruence rencontrant à l'infini l'une des directrices A ou B . Mais alors les points M correspondants seraient sur l'une des droites d'intersection du plan des xy et des plans menés par chacune des directrices parallèlement à l'autre; ce que l'on évite encore par un choix convenable des axes.

Les autres directions asymptotiques proviennent des droites D parallèles au plan P . Ces droites sont sur un paraboloïde qui coupe le plan des xy suivant une conique γ , passant en α et β et coupant C en $2n$ points qu'on peut supposer distincts, puisqu'on peut se donner γ *a priori* et choisir ensuite A , B et P . On a donc là $2n$ directions asymptotiques nouvelles, toutes distinctes, et distinctes des précédentes. Donc, en tout, $c + 2n$ points à l'infini, tous distincts et, par conséquent, tous simples sur G .

3° Les points situés sur A ou B sont simples. Soit en effet R_0 un de ces points, situé sur A par exemple, et coupons G par le plan $P = \mu_0$ qui passe par R_0 . Il y a $2n$ points d'intersection à l'infini et c à distance finie, correspondant aux points de contact des tangentes à C de coefficient angulaire μ_0 . Deux de ces points ne pourraient se confondre en R_0 que dans l'un des trois cas suivants :

a. La droite D_0 correspondante passe par un point multiple de C , d'ordre k par exemple. Mais μ a par hypothèse en ce point k valeurs distinctes, et les k points correspondants situés sur D_0 sont distincts.

b. La droite D_0 a son pied en un point d'inflexion de C . Mais

ces points sont en nombre limité, donc aussi les points où les droites D correspondantes rencontrent A et B . On peut donc, d'après la remarque d'Algèbre faite au début, supposer u, v, w, h tellement choisis qu'aucun de ces derniers points ne soit dans le plan $P = \mu$ qui lui correspond.

c. Par R_0 passent deux droites D_0 . Les pieds de ces droites, M_0 et M'_0 , sont alors sur un même rayon issu de α , et les tangentes en ce point sont de plus parallèles. Or cela n'arrive que pour un nombre limité de rayons passant par α (α étant quelconque) et par suite il n'y correspond qu'un nombre limité de points de A ; on peut donc encore supposer qu'aucun d'eux n'est dans le plan $P = \mu$ correspondant, c'est-à-dire qu'aucun d'eux n'est un point R_0 .

Tout point R_0 est donc bien simple.

4° Tout point R de G , autre que les précédents, est simple. Coupons en effet par le plan (RA) . Il n'y aurait deux points de l'intersection confondus en R que si la trace αM de ce plan sur le plan des xy était tangente en M (point homologue de R) à la courbe C . Mais alors le fait analogue ne peut se produire en coupant par le plan (RB) ; à moins que M ne soit un point multiple de C , ce qui n'a pas lieu si l'on prend α et β en dehors des tangentes aux points multiples de C .

Le théorème est donc démontré, car, en vertu de la remarque préliminaire, on peut satisfaire simultanément, par un choix convenable des indéterminées de la transformation, aux diverses conditions d'inégalité que nous avons dû introduire successivement.

4. Remarquons encore que notre courbe G a certainement des cordes qui ne la rencontrent qu'en deux points; car, dans le plan (βA) , par exemple, il n'y a de points de la courbe que sur $\alpha\beta$ et sur A ; de sorte qu'en joignant un des n premiers points à un des $c + n$ autres, on a l'une des cordes annoncées. Si donc on fait la perspective linéaire de G sur un plan, avec un point de vue arbitraire, on obtiendra une courbe C' n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes. Nous avons donc là une démonstration nouvelle de ce théorème connu :

Toute courbe plane algébrique C n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes peut être transformée, par

une transformation birationnelle, en une courbe plane algébrique C' n'ayant pas d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes ⁽¹⁾.

Notre démonstration nous paraît présenter cet intérêt que l'on pourrait écrire immédiatement la transformation qui change C en C'.

Enfin la même méthode s'appliquera encore pour faire correspondre à une courbe algébrique plane *quelconque* une courbe gauche n'ayant aucun point singulier. Il suffira de remplacer, dans ce qui précède, la quantité μ par une de ces fractions rationnelles qu'Halphen a appris à former ⁽²⁾, et qui jouissent de cette propriété de se développer, pour les points de chacun des cycles de la courbe donnée

$$x = x_k - t_k^{m_k}, \quad y = y_k + t_k^{n_k} [t_k],$$

sous la forme

$$\mu = \mu_k + a_k t_k - \dots, \quad (a_k \neq 0).$$

On voit alors immédiatement, en prenant par exemple le plan $P = 0$ pour l'un des plans de coordonnées, que G n'aura que des cycles d'ordre égal à 1. On pourra de plus disposer de l'indétermination de μ de manière que les différentes valeurs de μ_k , correspondant aux cycles de C qui ont une origine commune, soient inégales; et dès lors, les raisonnements précédents peuvent se reprendre, avec de simples modifications de détails. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute courbe plane algébrique est la perspective quadratique d'une courbe gauche n'ayant aucun point singulier, et la perspective linéaire de cette dernière n'a que des points doubles à tangentes distinctes, si le point de vue est convenablement choisi.

⁽¹⁾ On a longtemps admis ce théorème, sans démonstration rigoureuse. Voir le *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. II, p. 366. M. SIMART (*Comptes rendus de l'Académie*, 8 mai 1893), M. POINCARÉ (*Ibid.*, 3 juillet 1893), M. BERTINI (*Mathematische Annalen*, t. XLIV) en ont donné depuis diverses démonstrations.

⁽²⁾ Voir, par exemple, son *Étude sur les points singuliers*, dans le *Traité de Géométrie* de SALMON.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Cahen : *Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler.*

M. D. André : *Sur un théorème empirique d'Arithmétique.*

M. Carvallo : *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du mouvement de propagation en Physique mathématique.*

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fouret : *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Émile Picard transmet une Note de M. E. Cartan *Sur un théorème de M. Bertrand.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace.

J'ai donné récemment, à la Société Philomathique, la démonstration du théorème suivant :

Si un point matériel, M, animé de la vitesse MV, et soumis à la force MF, satisfait à la loi des aires par rapport à un point fixe O, c'est-à-dire si les aires décrites par OM sur la surface du cône de sommet O sont proportionnelles aux temps, les deux plans OMV, OMF sont constamment perpendiculaires.

La démonstration que j'ai communiquée à la Société Philomathique, bien que facile, peut encore être simplifiée d'une façon qui rend pour ainsi dire le théorème intuitif et se prête à une intéressante généralisation.

Si en effet nous posons $\mathbf{r} = \mathbf{v} \left(\mathbf{m} \frac{d\mathbf{m}}{dt} \right)$, l'extrémité du vecteur $\mathbf{r}$, vitesse aréolaire, décrira une courbe (P) que j'ai appelée l'*hodographe aréolaire* des mouvements. La vitesse de ce point P sera

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \left(\mathbf{m} \frac{d^2\mathbf{m}}{dt^2} \right).$$

Or, $\mathbf{r}'$ étant l'axe du plan OMF, $\mathbf{r}$ celui du plan OMV, il s'ensuit que l'angle de $\mathbf{r}'$ et de $\mathbf{r}$ sera égal à celui des deux plans en question.

Donc l'angle des deux plans OMV, OMF est égal à celui que forme la vitesse sur l'hodographe aréolaire avec le rayon OP correspondant.

Si la loi des aires est vérifiée, la grandeur de OP est constante, l'hodographe (P) est une courbe sphérique, et l'angle de $\mathbf{r}'$ avec $\mathbf{r}$ est droit. Nous avons donc, comme corollaire, l'énoncé rappelé au début de cette Note.

Si l'hodographe se réduit à la droite OP, l'angle considéré est nul, et la force est évidemment dirigée dans le plan OMV, le mouvement étant plan.

Si ces deux circonstances se produisent à la fois, nous tombons dans le cas des forces centrales, la force étant dirigée suivant MO. L'hodographe aréolaire se réduit alors à un point.

De là résulte un moyen graphique des plus simples pour avoir le plan osculateur à une courbe donnée (M). Si en effet nous considérons cette courbe comme parcourue d'un mouvement uniforme, il suffira d'élever, par un point fixe O, une perpendiculaire OP au plan OMV et de porter sur cette droite une longueur OP proportionnelle, ou simplement égale, à la distance de O à la tangente MV. On obtiendra ainsi une courbe (P) dont la tangente en P sera perpendiculaire au plan OMF. Donc, en menant par O, ou par M, un plan perpendiculaire à la tangente en P, son intersection avec le plan normal en M donnera la normale principale MF, la force étant normale puisque le mouvement est uniforme.

Appelons r , v , ω les grandeurs du rayon OM, de la vitesse et de l'accélération du point M, θ l'angle de la vitesse avec OM, φ celui de l'accélération avec la même droite. Les grandeurs de $\mathbf{r}$ et de $\mathbf{r}'$ sont alors $r v \sin \theta$, $r \omega \sin \varphi$, et il s'ensuit en particulier

que le rayon vecteur OP et la vitesse sur l'hodographe aréolaire sont dans le même rapport que les projections de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement considéré, sur un plan perpendiculaire à OM .

M. MANNHEIM adresse la Note suivante :

Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice.

Dans une Communication que j'ai faite à l'Académie des Sciences (¹), j'ai montré de plusieurs manières comment on peut déterminer les éléments principaux de courbure d'une surface (S) lorsqu'on connaît les centres de courbure de trois courbes de contour apparent de cette surface.

L'une d'elles est fondée sur une propriété de l'indicatrice, qui n'avait pas encore été signalée, et que j'ai seulement énoncée.

Depuis, j'ai donné deux démonstrations de cette propriété (²); j'en apporte aujourd'hui une troisième, plus simple encore que les précédentes.

Soient a un point de (S) et A la normale en ce point à cette surface. Projetons (S) sur un plan mené par A au moyen de projetantes perpendiculaires à ce plan; on obtient ainsi une courbe de contour apparent dont le centre de courbure correspondant à a est un point de A .

Il s'agit de faire voir que :

Les rayons de courbure en a des courbes de contour apparent de (S), obtenues sur des plans menés par A au moyen de projetantes respectivement perpendiculaires à ces plans, sont proportionnels aux carrés des distances de a aux tangentes de l'indicatrice de (S) en ce point, tangentes qui sont parallèles à ces projetantes.

Appelons I l'indicatrice de (S), courbe qui est tracée sur le plan tangent en a à cette surface.

Les tangentes à cette courbe parallèles aux projetantes forment

(¹) Séance du 13 août 1894.

(²) *Messenger of Mathematics*, août 1894.

l'indicatrice du cylindre circonscrit à la surface (S), cylindre qui la projette orthogonalement sur un plan mené par A.

Appelons c le point de contact d'une de ces tangentes avec I et p le pied de la perpendiculaire abaissée de a sur cette droite.

Désignons par R le rayon de courbure pour le point a de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ap); R est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S) projeté sur A.

Désignons par ρ le rayon de courbure de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ac); ρ est aussi le rayon de courbure de la section faite par le même plan dans (S).

Puisque la droite cp appartient à l'indicatrice du cylindre, on a

$$\frac{R}{ap^2} = \frac{\rho}{ac^2}.$$

Ce dernier rapport est constant, lorsque la direction des projetantes varie, puisque les points tels que c sont toujours sur I. Le rapport $\frac{R}{ap^2}$ est alors constant, quel que soit le plan mené par A, et la propriété est démontrée.

Appelons R_1 , R_2 les rayons de courbure principaux de (S) en a , φ l'angle des projetantes avec le grand axe de I et α , β les demi-axes de cette indicatrice. On a

$$\frac{R}{ap^2} = \frac{R_1}{\alpha^2},$$

mais

$$\frac{1}{ap^2} = \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi;$$

on a alors

$$R = R_1 \sin^2 \varphi + \frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} \cos^2 \varphi.$$

Comme $\frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} = R_2$, il vient $R = R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi$, qui est l'expression connue.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES;

Par M. E. GENTY.

Dans un Mémoire non encore publié relatif à la déformation infinitésimale des surfaces, j'ai obtenu quelques propositions, dont l'énoncé intéressera peut-être les lecteurs du *Bulletin*.

1. M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (B) sont *associées*, lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué.

Soient x, y et z ; x_1, y_1 et z_1 les coordonnées de deux points correspondants A et B, de deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent point par point. Pour que ces deux surfaces soient associées, il faut et il suffit que les expressions $z_1 dy - y_1 dz$, $x_1 dz - z_1 dx$, $y_1 dx - x_1 dy$ soient des différentielles exactes, de telle sorte qu'on puisse poser

$$(1) \quad \begin{cases} z_1 dy - y_1 dz = d\xi, \\ x_1 dz - z_1 dx = d\eta, \\ y_1 dx - x_1 dy = d\zeta. \end{cases}$$

ξ, η et ζ sont alors les coordonnées d'un point M d'une surface (M) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. Si les premiers membres des équations (1) sont des différentielles exactes, il en sera de même des expressions $z dy_1 - y dz_1$, $x dz_1 - z dx_1$, $y dx_1 - x dy_1$, et l'on pourra poser

$$(2) \quad \begin{cases} z dy_1 - y dz_1 = d\xi_1, \\ x dz_1 - z dx_1 = d\eta_1, \\ y dx_1 - x dy_1 = d\zeta_1. \end{cases}$$

ξ_1, η_1 et ζ_1 seront les coordonnées d'un point N définissant une surface (N) qui correspond à (B) par orthogonalité des éléments.

On aura d'ailleurs

$$\begin{aligned} d\xi - d\xi_1 &= d(yz_1 - y_1z), \\ d\eta - d\eta_1 &= d(zx_1 - z_1x), \\ d\zeta - d\zeta_1 &= d(xy_1 - x_1y), \end{aligned}$$

ou, en disposant convenablement des constantes introduites par les intégrations,

$$(3) \quad \begin{cases} \xi - \xi_1 = yz_1 - y_1z, \\ \eta - \eta_1 = zx_1 - z_1x, \\ \zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1y. \end{cases}$$

3. Soient X, Y et Z les cosinus directeurs de la normale au point A de (A), u et v les paramètres arbitraires auxquels on rapporte la surface, et posons

$$\begin{aligned} D_A &= - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_A &= - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ D''_A &= - \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned}$$

où nous désignons par le signe $\sum$ une somme étendue à trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés.

Les quantités D_A , D'_A et D''_A seront, à un facteur commun près, pour la surface (A), les déterminants de Gauss D, D' et D''; nous les appellerons les *coefficients de forme* de (A).

On aura de même, pour les coefficients de forme de (B),

$$\begin{aligned} D_B &= - \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_B &= - \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ D''_B &= - \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}; \end{aligned}$$

et la condition qui exprime qu'aux asymptotiques de l'une des surfaces correspond sur l'autre un réseau conjugué prend la forme

$$(4) \quad D_A D''_B + D'_A D'_B + D''_A D_B = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\sum x_1 X = p,$$

p sera la distance de l'origine au plan tangent en B à (B) et l'on aura

$$D_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep \right),$$

$$D'_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp \right),$$

$$D''_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp \right),$$

e, f et g désignant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A), $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ et γ' les symboles de Christoffel dérivés de cet élément linéaire.

Si enfin dans l'équation (4) on remplace D_B, D'_B et D''_B par les expressions qui précèdent, il vient

$$(5) \quad \begin{cases} D_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp \right) - 2 D'_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp \right) \\ + D''_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep \right) = 0. \end{cases}$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre d'où dépend la recherche d'une surface (B) associée à une surface donnée (A). Elle a pour caractéristiques les asymptotiques de (A).

On a d'ailleurs

$$x_1 = pX + \frac{\frac{\partial p}{\partial u} \left(Z \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial Z}{\partial v} \right) + \frac{\partial p}{\partial v} \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right)}{h},$$

avec les expressions analogues pour y_1 et z_1 .

Ainsi :

Toute solution p de l'équation (5) détermine :

- 1° Une surface (B) associée à (A) ;
- 2° Deux surfaces (M) et (N) correspondant respectivement à (A) et (B) par orthogonalité des éléments ;
- 3° Quatre couples de surfaces applicables dont la construction est bien connue ;

4° Enfin, une déformation infinitésimale des surfaces (A), (B), (M) et (N) définie par les relations

$$\begin{aligned} (A') \quad \begin{cases} x' = x + \varepsilon \xi, \\ y' = y + \varepsilon \eta, \\ z' = z + \varepsilon \zeta, \end{cases} & \quad (B') \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + \varepsilon_1 \xi_1, \\ y'_1 = y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \\ z'_1 = z_1 + \varepsilon_1 \zeta_1; \end{cases} \\ (M') \quad \begin{cases} \xi' = \xi + \varepsilon_2 x, \\ \eta' = \eta + \varepsilon_2 y, \\ \zeta' = \zeta + \varepsilon_2 z, \end{cases} & \quad (N') \quad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon_3 x_1, \\ \eta'_1 = \eta_1 + \varepsilon_3 y_1, \\ \zeta'_1 = \zeta_1 + \varepsilon_3 z_1. \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation (5) admet pour solution particulière le cosinus de l'angle de la normale en A à (A) avec une direction fixe quelconque.

Pour cette solution, l'associée de (A) se réduit à un point fixe B: la surface (M) est un plan et la déformation correspondante de (A) consiste dans une rotation autour de OB, suivie d'une translation. La surface est donc simplement déplacée, mais non déformée. A toute autre solution de l'équation (3) correspond une déformation effective de (A).

4. Des relations (1) et (2) on tire

$$dx = \frac{Y}{p} d\xi - \frac{Z}{p} d\eta, \quad dx_1 = \frac{Y}{q} d\xi_1 - \frac{Z}{q} d\eta_1,$$

où $q = \sum x X$ désigne la distance de l'origine au plan tangent en A à (A), avec des expressions analogues pour les différentielles des autres coordonnées.

Donc le point M_1 , qui a pour coordonnées

$$\frac{X}{p}, \quad \frac{Y}{p}, \quad \frac{Z}{p},$$

définit une surface (M_1) associée à M; c'est la polaire réciproque de (B) par rapport à l'origine.

De même l'associée de (N) est la polaire réciproque de (A) par rapport à l'origine.

5. Par des calculs très simples, on obtient, pour les coefficients

de forme des surfaces (M), (N), (A'), etc., les expressions suivantes :

$$D_M = \frac{p}{bh} (D_A D'_B - D'_A D_B),$$

$$D'_M = \frac{p}{bh} (D_A D''_B - D'_A D'_B) = \frac{p}{bh} (D'_A D'_B - D''_A D_B),$$

$$D''_M = \frac{p}{bh} (D'_A D''_B - D''_A D'_B);$$

$$D_N = \frac{bq}{ap} D_S,$$

$$D'_N = \frac{bq}{ap} D'_S,$$

$$D''_N = \frac{bq}{ap} D''_S;$$

$$D_{A'} = D_A + \frac{\varepsilon b}{p} D_M,$$

$$D'_{A'} = D'_A + \frac{\varepsilon b}{p} D'_M,$$

$$D''_{A'} = D''_A + \frac{\varepsilon b}{p} D''_M;$$

$$D_A = D_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D_M,$$

$$D'_A = D'_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D'_M,$$

$$D''_A = D''_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D''_M;$$

$$D_M = D_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D_A,$$

$$D'_M = D'_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D'_A,$$

$$D''_M = D''_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D''_A;$$

$$D_N = D_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D_B,$$

$$D'_N = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D'_B,$$

$$D''_N = D''_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D''_B,$$

où l'on a posé

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{OA},$$

$$b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \overline{OB}.$$

Soient d'abord u et v les paramètres du réseau conjugué commun à (A) et (B). On aura

$$D'_A = D'_B = 0$$

et, par suite,

$$D_M = D_M'' = D_N = D_N'' = 0.$$

Donc au réseau conjugué commun aux deux surfaces associées (A) et (B) correspondent les asymptotiques des surfaces (M) et (N).

Soient maintenant u et v les paramètres des asymptotiques de (A). On aura

$$D_A = D_A'' = D'_B = D'_M = D'_N = D'_B' = D'_N' = 0;$$

on peut donc énoncer la proposition suivante :

Aux asymptotiques de (A) correspondent : les réseaux conjugués des surfaces (B) et (N) qui restent conjugués dans la déformation infinitésimale correspondante de ces deux surfaces; un réseau conjugué sur (M); les asymptotiques de la surface (N₁) associée à (N).

On a

$$D_A D_B'' - D_A' D_B' + D_A'' D_B = 0.$$

Donc aux asymptotiques de (A') correspond sur (B') un réseau conjugué et inversement.

6. Reprenons enfin les équations (3)

$$\xi - \xi_1 = y z_1 - y_1 z,$$

$$\tau_1 - \tau_1 = z x_1 - z_1 x,$$

$$\zeta - \zeta_1 = x y_1 - x_1 y.$$

La normale en M à (M) étant parallèle à OB et la normale en N à (N) étant parallèle à OA, ces équations montrent que (M) et (N) sont les deux nappes de la surface focale de la congruence

engendrée par la droite MN; et, comme les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, on a immédiatement la proposition suivante de Ribaucour :

Considérons une déformation infinitésimale d'une surface (A) et, par chaque point A de (A), menons, dans le plan tangent à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point A dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

On a, d'ailleurs,

$$\sum (\xi - \xi_1)^2 = \sum (y z_1 - y_1 z)^2$$

ou

$$\overline{MN} = ab \sin V,$$

V étant l'angle des directions OA et OB.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE QUI DONNE LA CONSTANTE D'EULER;

Par M. E. CAHEN.

On sait que la constante d'Euler est définie par la formule

$$(1) \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Considérons l'expression

$$(2) \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}$$

où nous supposons que s est une quantité dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Cette expression se réduit à

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

pour $s = 1$.

On démontre facilement que l'expression (2) a une limite

pour $n = \infty$; nous allons voir de plus que cette limite est

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction bien connue de Riemann.

Plus simplement, la limite de

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

est $\zeta(s)$.

En effet, soit

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} = \zeta_n(s).$$

Alors

$$\begin{aligned} \zeta_n(s) - \zeta_{n-1}(s) &= \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s} \\ &= - \left(\frac{s}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^{s+2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Faisons dans cette égalité $n = 2, 3, \dots, n$ et ajoutons; puis faisons croître n indéfiniment. Nous obtenons, en remarquant que la partie réelle de s est plus grande que zéro, par hypothèse,

$$\lim \zeta_n(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - \left\{ \frac{s}{1 \cdot 2} [\zeta(s+1) - 1] + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [\zeta(s+2) - 1] + \dots \right\}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{1-s} + \frac{s}{1 \cdot 2} + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

est nul, comme on le voit en développant $(1-t)^{1-s}$ d'après la formule du binôme.

Il reste donc

$$\lim \zeta_n(s) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p).$$

Done, pour démontrer que $\lim \zeta_n(s) = \zeta(s)$, il suffit de démontrer que

$$(3) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p) = 0.$$

Pour démontrer cette formule, on peut se servir de l'expression suivante de $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c \frac{x^{s-1} dx}{e^{-x}-1},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine, mais aucun autre zéro de la fonction $e^{-x}-1$, et s'étendant à l'infini du côté des x négatifs.

La formule (3) à démontrer devient alors

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{dx}{e^{-x}-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1}.$$

Or

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1} = -x^{s-2} \Gamma(1-s)(e^{-x}-1);$$

donc la formule à démontrer se réduit à

$$0 = -\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c x^{s-2} dx.$$

Elle est alors évidente, puisque la partie réelle de s est plus petite que 1.

Remarquons que la formule

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right)$$

que nous venons de démontrer pour les valeurs de s , dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, est d'ailleurs évidente pour celles dont la partie réelle est plus grande que 1.

Pour $s=1$, elle donne la formule (1), car on sait que

$$\zeta(s) = C + \frac{1}{1-s} + A(s-1) + B(s-1)^2 + \dots$$

SUR UN THÉORÈME DE M. BERTRAND;

Par M. E. CARTAN.

Il existe un certain nombre de démonstrations du célèbre théorème énoncé et démontré pour la première fois en 1845 par M. J. Bertrand :

Toute fonction rationnelle de n lettres ($n \neq 4$), qui n'est ni symétrique ni alternée, prend au moins n valeurs distinctes, lorsqu'on y permute ces lettres.

Ce théorème a été démontré depuis par Cauchy, Serret et M. Jordan. Mais les démonstrations que ces géomètres en ont données sont assez longues et exigent des connaissances assez étendues sur la théorie des substitutions. Il me semble qu'on peut le déduire immédiatement de deux lemmes, connus d'ailleurs depuis très longtemps, et dont la démonstration se fait d'une façon tout à fait élémentaire. Voici comment on peut présenter la chose, en ne supposant connues que les notions de substitutions, de produit de substitutions et de groupes de substitutions.

1. Soit $F(a, b, c, \dots, l)$ une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \dots, l$, prenant p valeurs distinctes

$$F = F_1, F_2, F_3, \dots, F_p,$$

lorsqu'on y permute les lettres $a, b, \dots, l$ de toutes les façons possibles. Si l'on effectue sur une quelconque de ces p fonctions une substitution des n lettres, cela revient à effectuer sur F deux substitutions successives, c'est-à-dire qu'on obtient encore une des fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$. De plus, une même substitution, effectuée sur deux fonctions distinctes, donne naissance à deux fonctions distinctes. Il en résulte qu'à chaque substitution S des n lettres $a, b, \dots, l$ on peut faire correspondre une permutation des p quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$, à savoir

$$F_1 S, F_2 S, \dots, F_p S,$$

en désignant par $F_i S$ ce que devient F_i par la substitution S . On obtient ainsi $N = n!$ permutations des p quantités F . Ces N per-

mutations ne sont pas nécessairement toutes distinctes. Une quelconque d'entre elles coïncidera avec $(q - 1)$ autres, s'il y a q substitutions n'altérant aucune des quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$, et réciproquement. Soient

$$1, T_1, T_2, \dots, T_{q-1}$$

toutes les substitutions qui jouissent de cette propriété. Nous aurons formé $\frac{N}{q}$ permutations distinctes des p quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Il est évident que le produit de deux quelconques des substitutions T est encore une substitution T , car c'est une substitution qui n'altère évidemment aucune des quantités F . Donc les substitutions T forment un groupe Γ . Il y a plus. Soit S une substitution quelconque des n lettres $a, b, \dots, l$. On a, quel que soit α ,

$$F_\alpha S T_i = F_\alpha S,$$

d'où, en effectuant sur les deux membres la substitution S^{-1} inverse de S ,

$$F_\alpha S T_i S^{-1} = F_\alpha S S^{-1} = F_\alpha,$$

et, par suite,

$$S T_i S^{-1} = T_k.$$

La substitution $S T_i S^{-1}$ est dite *transformée* de T_i par la substitution S^{-1} . On voit donc que toute substitution de Γ est transformée par une substitution quelconque en une autre substitution de Γ . Pour cette raison Γ est dit *invariant* dans le groupe total des substitutions des n lettres $a, b, \dots, l$ ou, autrement dit, dans le groupe symétrique de ces n lettres.

Sil'on remarque que, parmi les $\frac{N}{q}$ permutations des p quantités F , il y en a au moins p distinctes, puisque la première quantité F_1 de la première permutation peut devenir $F_2, F_3, \dots, F_p$, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Si F est une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \dots, l$ prenant p valeurs distinctes lorsqu'on y permute ces lettres, il existe un système de $\frac{n!}{q}$ permutations distinctes de p lettres, où q désigne le nombre des substitutions d'un groupe de n lettres invariant dans le groupe symétrique, et de plus on a

les inégalités

$$p \leq \frac{n!}{q} \leq p!$$

2. Il s'agit maintenant de chercher toutes les valeurs possibles du nombre q , parmi lesquelles se trouve évidemment la valeur 1, si aucune substitution ne conserve toutes les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Si l'on remarque que toute substitution peut être obtenue par une succession de transpositions de deux lettres, le nombre de ces transpositions conservant toujours la même parité, de quelque façon qu'on procède, il est clair que l'ensemble des substitutions résultant d'un nombre pair de transpositions forme un groupe G . Ce groupe est invariant dans le groupe symétrique, car si T est une de ses substitutions, S une substitution quelconque de n lettres, STS^{-1} résulte évidemment, comme T , d'un nombre pair de transpositions. Ce groupe G s'appelle le *groupe alterné*, et il contient la moitié des substitutions de n lettres, c'est-à-dire $\frac{n!}{2}$. Il peut évidemment être obtenu au moyen des substitutions qui sont les produits de *deux* transpositions, substitutions qui sont de la forme (abc) ou $(ab)(cd)$, suivant que ces deux transpositions déplacent ou non une lettre commune⁽¹⁾. Il suffit même de prendre les cycles de trois lettres, car on a

$$(abc)(abd) = (ad)(bc).$$

Si n est différent de 4, il n'y a pas d'autre groupe invariant dans le groupe symétrique que la substitution identique et le groupe alterné. Pour le démontrer, je rappelle que, si une substitution T est décomposée en cycles

$$T = (ab\dots d)(ef\dots) \dots,$$

la transformée de T , par une substitution quelconque S , est formée du même nombre de cycles, chacun d'eux échangeant le même nombre de lettres. Car, si S remplace respectivement $a, b, \dots, d$ par $\alpha, \beta, \dots, \delta$, la substitution $S^{-1}TS$ contiendra manifestement

(1) Je désigne comme d'habitude par la notation $(\alpha\beta\dots\lambda)$ la substitution circulaire (ou cycle) effectuée sur les lettres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

le cycle $(\alpha\beta\dots\delta)$. C'est pour cela que $S^{-1}TS$ est dite *semblable* à T , et si T fait partie d'un groupe invariant dans le groupe symétrique, il en sera de même de toutes les substitutions semblables à T .

Cela étant, soit Γ un groupe invariant dans le groupe symétrique. « Supposons en premier lieu que, parmi les cycles d'une de ses substitutions T , il en existe un contenant plus de deux lettres, $T = (abc\dots d)(ef\dots)\dots$. Soient α, β, δ trois lettres quelconques; $\gamma, \epsilon, \varphi, \dots$ les autres. Les substitutions

$$T_1 = (\alpha\beta\gamma\dots\delta)(\epsilon\varphi\dots)\dots \quad \text{et} \quad T_2 = (\beta\gamma\dots\delta)(\epsilon\varphi\dots)\dots,$$

semblables à T , faisant partie de Γ , $T_2T_1^{-1}$ en fera également partie; mais cette substitution se réduit au cycle $(\alpha\beta\delta)$ des trois lettres arbitraires α, β, δ .

» Si tous les cycles de T contiennent au plus deux lettres, soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre lettres arbitraires; $\epsilon, \varphi, \dots$ les autres; Γ contiendra les deux substitutions $T_1 = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\varphi)\dots$, $T_2 = (\alpha\gamma)(\beta\delta)(\epsilon\varphi)\dots$, et par suite $\Sigma = T_1T_2 = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$. Si $n > 4$, Γ contiendra de même $\Sigma_1 = (\alpha\zeta)(\beta\gamma)$, où ζ est une lettre arbitraire autre que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et, par suite aussi, $\Sigma\Sigma_1 = (\alpha\delta\zeta)$ ('). »

Donc dans tous les cas Γ contient tous les cycles de trois lettres et, par suite, toutes les substitutions du groupe alterné. S'il en contenait une autre non alternée S , en désignant par U une transposition quelconque, il contiendrait la substitution alternée US et, par suite aussi, $(US)S^{-1} = U$, donc toutes les transpositions et toutes les substitutions de n lettres.

La proposition est donc démontrée, et q ne peut avoir, si n est différent de 4, que l'une des valeurs 1 ou $\frac{n!}{2}$.

3. Cela étant, le théorème en vue se démontre immédiatement. Si q est égal à 1, les inégalités

$$p \leq \frac{n!}{q} \leq p!$$

exigent que p soit au moins égal à n ; si q est égal à $\frac{n!}{2}$, les

(') JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 63.

mêmes inégalités exigent que p soit égal à 2 et alors la fonction F admet le groupe alterné, c'est-à-dire est alternée.

On peut démontrer que, dans le cas de $n \neq 4$, le groupe alterné n'admet aucun sous-groupe invariant. L'application des mêmes raisonnements montre alors que *toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné.*

P.-S. Depuis la rédaction de cette Note, j'ai appris que M. E. Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées, avait, dans une thèse parue en novembre 1892, donné du théorème de M. Bertrand une démonstration fondée sur des principes analogues à ceux que j'ai exposés. M. Maillet, en partant du fait que le groupe alterné n'admet pas de sous-groupe invariant, en déduit (p. 20-21) que toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné, d'où résulte facilement le théorème en question. On voit que ma démonstration ne suppose pas connue la propriété du groupe alterné invoquée par M. Maillet.

**SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE;**

Par M. E. CARVALLO.

1. M. Poincaré ⁽¹⁾ a étudié l'équation aux dérivées partielles, dite *des télégraphistes*, qu'il a ramenée à la forme

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2} + U.$$

Il a montré que la propagation de l'ébranlement U se fait avec une vitesse constante égale à l'unité. Cet important résultat a provoqué d'intéressantes Notes de MM. Picard ⁽²⁾ et Boussinesq ⁽³⁾ sur le même sujet.

Je me propose d'aborder ici la même équation, mais *avec se-*

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVII, p. 1027, déc. 1893.

⁽²⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 16, janv. 1894.

⁽³⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 162, janv. 1894.

cond membre,

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - U = F(x, t),$$

qui a aussi un grand intérêt en Physique mathématique.

2. Rappelons d'abord quelques résultats relatifs à l'équation des cordes vibrantes :

1° L'équation

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}$$

se ramène à la forme

$$\frac{d^2 U}{du dv} = 0$$

par le changement de variables

$$2u = t + \frac{x}{a}, \quad 2v = t - \frac{x}{a}$$

et a pour intégrale générale

$$U = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

Les fonctions arbitraires f et φ se déterminent par deux conditions aux limites variables suivant les cas.

2° De cette intégrale on conclut que le mouvement se propage d'un point à un autre avec la vitesse a , ce qui conduit, par induction, à découvrir l'intégrale de l'équation à second membre

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + F(x, t).$$

Imaginons en effet que la corde parte du repos et que, à partir de l'époque $t = 0$, agissent brusquement des forces normales à la corde et représentées par la fonction donnée $F(x, t)$. Les hypothèses sont alors celles-ci

$$\begin{array}{ll} U(x, t) = 0, & \frac{d}{dt} U(x, t) = 0, \quad \text{pour } t = 0, \\ F(x, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array}$$

Il y a lieu de penser que le point x subit à l'époque t les actions de tous les points ξ qui sont à une distance de lui dont la

valeur r est inférieure à αt , l'action du point ξ se faisant d'ailleurs sentir avec un retard $\frac{r}{\alpha}$ égal au temps que met cette action à parcourir la distance r . D'après cette induction, l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$U = \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} f\left(\xi, t - \frac{r}{\alpha}\right) d\xi.$$

En portant cette valeur de U dans l'équation à intégrer, on peut déterminer f de façon que l'expression de U soit bien l'intégrale cherchée. Le calcul est un peu encombrant; comme il est compris à titre de cas particulier dans celui qui va suivre, je me dispense de le reproduire ici et j'aborde tout de suite le cas qui fait l'objet de ce travail.

3. Je considère l'équation

$$(I) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - k^2 U + F(x, t).$$

C'est, si l'on veut, l'équation du mouvement d'une corde qui, outre les forces d'élasticité, subirait la force $F(x, t)$ et une réaction proportionnelle à l'élongation $-k^2 U$.

Je suppose, comme précédemment,

$$(II) \quad \begin{cases} U(x, t) = 0, & \frac{d}{dt} U(x, t) = 0, & \text{pour } t = 0, \\ F(x, t) = 0, & & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

Au numéro précédent, la fonction $f\left(\xi, t - \frac{r}{\alpha}\right)$, introduite pour former l'intégrale cherchée, était une solution de l'équation à intégrer, privée de son second membre et où on a remplacé x par r . Il est alors à prévoir que la fonction $f\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)$ devra être remplacée ici par une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 U}{dr^2} - k^2 U.$$

C'est en effet ce que nous allons trouver; mais, pour ne rien préjuger, je considérerai une fonction quelconque $f(t, r)$, variable

d'ailleurs avec le point ξ et que je désignerai par $f(\xi, t, r)$. En outre, je suppose qu'il existe une vitesse de propagation que je désigne par v . M. Poincaré nous a enseigné que l'on a $v = a$; mais il est intéressant de retrouver ici cet important résultat. Ainsi je pose

$$(III) \quad U(x, t) = \int_{x-vt}^{x+vt} f(\xi, t, r) d\xi,$$

r désignant toujours la valeur absolue de la distance du point x au point ξ variable dans le champ de l'intégration.

Je porterai cette valeur dans l'équation (I) et je montrerai que l'on peut déterminer la fonction f de façon que (III) soit l'intégrale cherchée de (I). Je calcule donc les dérivées de l'expression (III) que j'écris

$$(III) \quad U(x, t) = \int_{x-vt}^x f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi + \int_x^{x+vt} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi.$$

Il vient, pour les dérivées par rapport à t ,

$$(III)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi \\ &\quad + v f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v f(\xi = x + vt, t, r = vt), \end{aligned} \right.$$

puis

$$(III)'' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi \\ &\quad + 2v \frac{\partial}{\partial t} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + 2v \frac{\partial}{\partial t} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &\quad - v^2 \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v^2 \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &\quad + v^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + v^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x + vt, t, r = vt). \end{aligned} \right.$$

Pour les dérivées par rapport à x , j'obtiens

$$(III)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi - \int_x^{x+vt} \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi \\ &\quad - f(\xi = x - vt, t, r = vt) + f(\xi = x + vt, t, r = vt). \end{aligned} \right.$$

puis

$$(III)_2 \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi \\ &- \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x - vt, t, r = vt) - \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) + \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) \\ &- \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x + vt, t, r = vt). \end{aligned} \right.$$

Je porte les valeurs obtenues pour U , $\frac{d^2 U}{dt^2}$, $\frac{d^2 U}{dx^2}$ dans l'équation (I); il vient

$$(I)' \left\{ \begin{aligned} F(x, t) &= \int_{x-vt}^{x+vt} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] f(\xi, t, r) d\xi \\ &+ \left[2v \frac{\partial}{\partial t} + (-v^2 + \alpha^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + \alpha^2) \frac{\partial}{\partial r} \right] f(\xi = x - vt, t, r = vt) \\ &+ \left[2v \frac{\partial}{\partial t} + (v^2 - \alpha^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + \alpha^2) \frac{\partial}{\partial r} \right] f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &- 2\alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0). \end{aligned} \right.$$

Cette équation doit être satisfaite quels que soient x et t . Examinons le premier terme du second membre et supposons pour un instant que la fonction soumise au signe $\int$ ne soit pas nulle. Par hypothèse, $f(t, r)$ est une fonction déterminée quand $F(t)$ est donnée; mais cette dernière fonction, rien n'empêche de la donner à volonté pour chaque point ξ intérieur au segment d'intégration qui s'étend de $x - vt$ à $x + vt$. L'équation (I)' ne saurait être alors satisfaite, puisque le premier terme dépendrait de la distribution des valeurs de $F(\xi, t)$ à l'intérieur du champ d'intégration, tandis que les autres termes n'en dépendent pas. Ainsi, il faut que $f(\xi, t, r)$ soit, pour tous les points ξ , une solution de l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) f = 0.$$

De même, si $v^2 - \alpha^2$ était différent de zéro, rien n'empêcherait

de donner à $\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt)$ telle valeur qu'on voudrait sans rien changer aux autres termes de l'équation. Celle-ci ne peut donc être satisfaite que si l'on a

$$v = a.$$

La vitesse de propagation est égale à a . C'est le résultat de M. Poincaré.

Enfin on trouve, par un raisonnement tout semblable, que l'équation (I) fournit encore les conditions

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial r} \right) f(\xi = x - at \text{ ou } x + at, t, r = at) &= 0, \\ -2a^2 \frac{\partial}{\partial r} f(x, t, r = 0) &= F(x, t). \end{aligned}$$

Ces équations doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de x . Je supprimerai désormais l'écriture des lettres ξ et x qui n'interviendront plus dans le calcul et j'écrirai ces équations

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial r} \right) f(t, r = at) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} f(t, r = 0) = -\frac{1}{2a^2} F(t). \end{cases}$$

La première s'écrit encore

$$0 = \frac{d}{dt} f(t, at),$$

d'où

$$(3) \quad f(t, at) = \text{const.} = f(0, 0).$$

Ces équations ne suffisent pas encore à exprimer les conditions du problème : il faut encore que la fonction $U(x, t)$ satisfasse aux conditions initiales, savoir

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} U(x, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Or la fonction

$$U(x, t) = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r) d\xi$$

est nulle pour $t = 0$, puisque le champ de l'intégration est alors nul. Quant à $\frac{dU}{dt}$, calculée plus haut, elle se réduit, pour cette

valeur de t , à

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 2a f(x, 0, 0).$$

Ainsi, la constante $f(0, 0)$ qui figure dans l'équation (3) doit être nulle. En résumé, les conditions du problème se réduisent à celle-ci :

f est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) f = 0$$

qui satisfait aux conditions aux limites suivantes

$$(2) \quad \begin{cases} f(t, at) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} f(t, r = 0) = -\frac{1}{2a^2} F(t). \end{cases}$$

Si, en particulier, on suppose $k = 0$, ces équations donnent

$$f(t, r) = \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{r}{a}} F(\theta) d\theta.$$

Lorsque k est différent de zéro, la solution $f(t, r)$ des équations (1), (2) est plus difficile à obtenir, mais elle a une existence certaine et unique. On peut en trouver un développement en série par la méthode d'approximations successives de M. Picard⁽¹⁾, en partant de la solution que je viens d'indiquer pour $k = 0$. Le problème proposé est donc entièrement résolu par la formule

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r) d\xi.$$

La méthode employée ici est très générale. Elle s'étend d'abord à l'espace à trois dimensions⁽²⁾, puis, d'autre part, à des cas où les équations du mouvement renfermeraient des termes proportionnels aux vitesses. Elle a donc un grand intérêt en Physique mathématique.

(¹) *Journal de Mathématiques*, 1890. Chap. II.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, p. 1003, déc. 1894.

SUR LES RACINES PRIMITIVES (1)

(Suite et fin);

Par M. FROLOV.

10. Nommons s le nombre de termes de la chaîne qui commence par le groupe $[1]$.

Il est facile de démontrer :

1° Que la seconde chaîne ouverte, qui n'existe que pour les modules de la forme $m = 8q + 1$, où q est un nombre entier quelconque, a le même nombre de termes, c'est-à-dire s termes;

2° Que toute chaîne fermée a deux fois plus de termes, c'est-à-dire $2s$ termes;

3° Qu'il suffit d'avoir la première chaîne ouverte, pour reconnaître de suite le nombre f de chaînes fermées, qui est donné par les formules

$$f = \frac{m-1-s}{2s}, \quad f = \frac{m-1-2s}{2s},$$

suivant qu'il n'y a qu'une seule chaîne ouverte ou qu'il y en a deux;

4° Que la première chaîne ouverte englobe tous les résidus d'un certain degré dont l'exposant j est donné par la formule

$$j = \frac{m-1}{s}.$$

Cet exposant j joue un grand rôle dans la recherche des racines primitives; s'il est composé, on déterminera tous ses diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots$

Pour découvrir une ou quelques racines primitives, de n'importe quel module m , on n'a besoin de construire qu'une seule chaîne, celle qui se déploie au moyen du groupe $[1]$ et que nous appellerons *chaîne principale*. Il est inutile de construire les autres chaînes et même de s'en occuper.

(1) Le Mémoire, inséré sous ce titre dans le n° 7 du tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, en 1893, étant inachevé, nous avons repris notre travail, et nous présentons maintenant cette Note supplémentaire, qui complète ledit Mémoire.

11. En déployant une chaîne au moyen du groupe $[1]$, on ne peut pas prévoir si elle s'arrêtera avant d'avoir englobé tous les $(m - 1)$ termes et ne sera pas unique, excepté un seul cas, celui où le module est de la forme $m = 8q + 1$; alors les nombres 2 et -2 sont des résidus quadratiques et la chaîne ne peut pas être unique.

Quand on a un module de cette forme, ou bien un module d'une forme quelconque, pour lequel $(m - 1)$ n'a qu'un seul facteur impair, si la chaîne ne s'arrête pas d'elle-même, il faut la continuer jusqu'à ce qu'elle englobe $\frac{m-1}{2}$ termes; si elle ne s'arrête pas là, elle englobera évidemment tous les $m - 1$ termes et sera unique. Mais quand on a un module n'appartenant pas à la forme $m = 8q + 1$, pour lequel $(m - 1)$ a deux ou plusieurs facteurs impairs, dont le plus petit est p , on pourra arrêter la chaîne après avoir atteint $\frac{m-1}{p}$ termes. Par exemple pour

$$m = 71 = 2 \cdot 5 \cdot 7 + 1,$$

on a $p = 5$, et par suite on arrêtera la chaîne après avoir englobé $\frac{70}{5} = 14$ termes.

Si la chaîne s'arrête d'elle-même, elle sera la chaîne principale et tous ses s termes seront résidus du degré $j = \frac{m-1}{s}$. Outre cela, certains de ses termes seront résidus d'autres degrés, marqués par des exposants premiers avec j , tandis que les autres termes ne le seront pas. On le déterminera facilement, car les termes 1 et -1 sont résidus de tous les degrés impairs; pour $m = 4h - 1$ ils sont aussi résidus quadratiques; pour $m = 4h - 1$ le terme 1 est résidu et le terme -1 est non-résidu quadratique. Si l'on assigne à tous les groupes, en commençant par celui qui contient les termes 2 et -2 , des numéros d'ordre 1, 2, 3, 4, ... les groupes qui portent les nos $p, 2p, 3p, \dots$ seront composés de résidus d'un degré impair p . Quant aux résidus quadratiques, pour $m = 4h + 1$ ils composeront les groupes aux numéros pairs 2, 4, 6, ...; et pour $m = 4h - 1$, si la chaîne est terminée par le groupe $[c]$, ce sont les deux premiers termes de tous les groupes qui seront résidus quadratiques, et si la chaîne est

terminée par le groupe $[u]$, dans les groupes aux numéros impairs 1, 3, 5, ... ce sont les deux derniers termes, et dans les groupes aux numéros pairs 2, 4, 6, ... ce sont les deux premiers termes qui seront résidus quadratiques.

La composition de la chaîne principale étant de cette manière complètement déterminée, on passera à la recherche des racines primitives.

Pour cela on déterminera d'abord tous les diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots$ de l'exposant j , et puis on prendra, parmi les petits nombres 3, 5, 6, 7, ... qui ne figurent pas dans la chaîne, un nombre quelconque t et l'on calculera ses résidus de tous les degrés marqués par ces diviseurs : $t^{d_1}, t^{d_2}, \dots$, que nous appellerons *résidus partiels* de t . Si l'un d'eux t^d se trouve dans la chaîne, cela indiquera que t n'est pas une racine primitive, car on aura la congruence $t^d \equiv x^j$ ou $t \equiv x^{\frac{j}{d}}$, qui exprime que t est résidu du degré $\frac{j}{d}$ d'un certain nombre x . Si aucun des résidus partiels n'entre dans la chaîne, on observera si le résidu t^j , qui sera nommé *résidu principal* et qui se trouve nécessairement dans la chaîne, n'est résidu d'aucun degré dont l'exposant p est premier avec j . S'il l'est, cela indiquera évidemment que t est lui-même résidu du degré p et que, par conséquent, il n'est pas une racine primitive. Au contraire, si t n'est résidu d'aucun degré autre que celui qui est marqué par l'exposant j , il est une racine primitive.

12. Éclaircissons l'application de cette méthode par quelques exemples :

1° Soit proposé le module $m = 89 = 2^3 \cdot 11 + 1$.

On construit la chaîne principale

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{N}^\circ 1. & & \text{N}^\circ 2. \\
 & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} \\
 1, & 1, & 88, & 88; & 2, & 45, & 44, & 87; & 4, & 67, & 22, & 85; \\
 & & \text{N}^\circ 3. & & \text{N}^\circ 4. & & \text{N}^\circ 5. \\
 & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} \\
 8, & 78, & 11, & 81; & 16, & 39, & 50, & 73; & 32, & 64, & 25, & 57;
 \end{array}$$

qui contient 22 termes. Donc $s = 22$, et $j = \frac{88}{22} = 4$. Ce dernier n'a qu'un seul diviseur $d = 2$.

La chaîne ne contient pas les termes 3, 5, 6, 7, 10, ...

On a la chaîne principale

		N° 1.	N° 2.
1,	1, 682, 682;	2, 342, 341, 681;	4, 171, 512, 679;
	N° 3.	N° 4.	N° 5.
8, 427, 256, 675;	16, 555, 128, 667;	32, 619, 64, 651;	

qui contient 22 termes. Donc $s = 22$ et $j = \frac{682}{22} = 31$, nombre premier.

La chaîne ne renferme pas 3, 5, 6, 7, ...

Le résidu principal de 3 est $3^{31} \equiv 1$, donc il est résidu des degrés 2 et 11, et 3 n'est pas une racine primitive.

Le résidu principal de 5 est $5^{31} \equiv 427$; il se trouve dans le groupe n° 3 et n'est pas résidu des degrés 2 et 11, donc 5 est une racine primitive de 683.

Ces exemples éclaircissent suffisamment l'application de la nouvelle méthode et nous espérons que l'on reconnaîtra qu'elle est plus simple et moins laborieuse que les autres méthodes connues.

ERRATA

du Mémoire *Sur les racines primitives*, inséré dans le tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1893.

1° Page 113, ligne 3 en remontant, *au lieu de* : $r = -\frac{m+x^2}{4}$, *lisez* : $r = \frac{m+x^2}{4}$.

2° Page 123, lignes 6-8, *au lieu de* : car le groupe central de ces chaînes est composé de résidus de tous les degrés impairs, et les groupes composés ..., *lisez* : car le groupe central de ces chaînes, qui existe si h n'est pas divisible par 4, est composé de résidus de tous les degrés impairs; s'il n'existe pas, les deux groupes du milieu sont composés de racines primitives; les deux groupes extrêmes le sont dans les deux cas, et parce que les groupes composés ...

3° Page 124, ligne 3 en remontant, *au lieu de* : Pour les modules de la forme $m = 6N + 1$, où N est ..., *lisez* : Pour les modules des formes $m = 6N + 1$ et $m = 12N + 1$, où N est ...

ERRATA.

Page 201, ligne 12 en remontant, *au lieu de* : coterons, *lisez* : substituerons.

Page 203, ligne 17, *au lieu de* : définie, *lisez* : défini.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	IV
Liste des Sociétaires perpétuels.....	V
État de la Société mathématique au commencement de 1894.....	VI
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	XV
 H9d. — Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité; par M. ÉMILE PICARD.....	 2
O6l. — Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques; par M. RAFFY.....	8
L'48a, M'51z. — Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques. Son identité avec un problème plan; par M. PICQUET.....	19
R7b β . — Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan; par M. KÆNIGS.....	25
P2a. — Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée; par M. APPELL.....	27
Q4bz. — Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques; par M. LAISANT.....	28
O6k. — Note sur des couples de surfaces applicables; par M. E. GENTY...	36
M'5h. — Sur les tangentes à une cubique plane; par M. GOURSAT.....	45
O6k. — Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution; par M. DEMOULIN.....	47
H10b. — Note sur les intégrales de M. Schwarz; par M. ANDRADE.....	50
H1a, H5d. — Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires; par M. ÉMILE PICARD.....	52
O4gz. — Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices; par M. ANTONARI.....	58
O61z. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé); par M. RAFFY.	63
H9ez. — Remarque sur le théorème de M. Moutard; par M. FEHR.....	67
G4dz. — Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique; par M. ZAREMBA.....	68
H5jz. — Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension; par M. BURKHARDT.....	71

	Page.
K4. Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices; par M. BARBARIN.....	76
R7b β . — Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique; par M. L. LECORNU.....	81
O61z. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé) (<i>suite et fin</i>); par M. RAFFY.....	84
O5e. — Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi; par M. BALITRAND.....	97
H9e. — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites; par M. ÉMILE PICARD.....	103
O6g. — Sur les surfaces à courbure totale constante; par M. E. GENTY.....	106
O6m. — Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux; par M. PAUL ADAM.....	110
B1a. — Note sur une identité entre certains déterminants; par M. P. PAINLEVE.....	116
O6k. — Sur le problème général de la déformation des surfaces; par M. L. RAFFY.....	119
H5jz. — Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre; par M. P. VERNIER.....	133
R8e. — Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes; par M. P. PAINLEVE.....	136
R7g. — Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques; par M. J. ANDRADE.....	186
R6a γ . — Sur le théorème des aires; par M. APPELL.....	190
R6a γ . — Sur la rotation d'un système déformable; par M. ÉMILE PICARD.....	195
X3. Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler; par M. M. D'OCAGNE.....	197
O5h. — Sur l'équation d'Euler et les lignes de courbure de l'ellipsoïde; par M. PAUL ADAM.....	205
P4a. — Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique; par M. E. VESSIOT.....	208
R6a γ . — Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace; par M. LAISANT.....	217
O5d. — Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice; par M. MANNHEIM.....	219
O6k. — Note sur la déformation infinitésimale des surfaces; par M. E. GENTY.....	221
E1d. — Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler; par M. E. CAHEN.....	227
A4a. — Sur un théorème de M. Bertrand; par M. CARTAN.....	230
H9d. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique; par M. CARVALLO.....	234
17a. — Sur les racines primitives; par M. FROLOV.....	241
Errata.....	246
Table des matières du tome XXII.....	247

FIN DE LA TABLE DU TOME XXII.

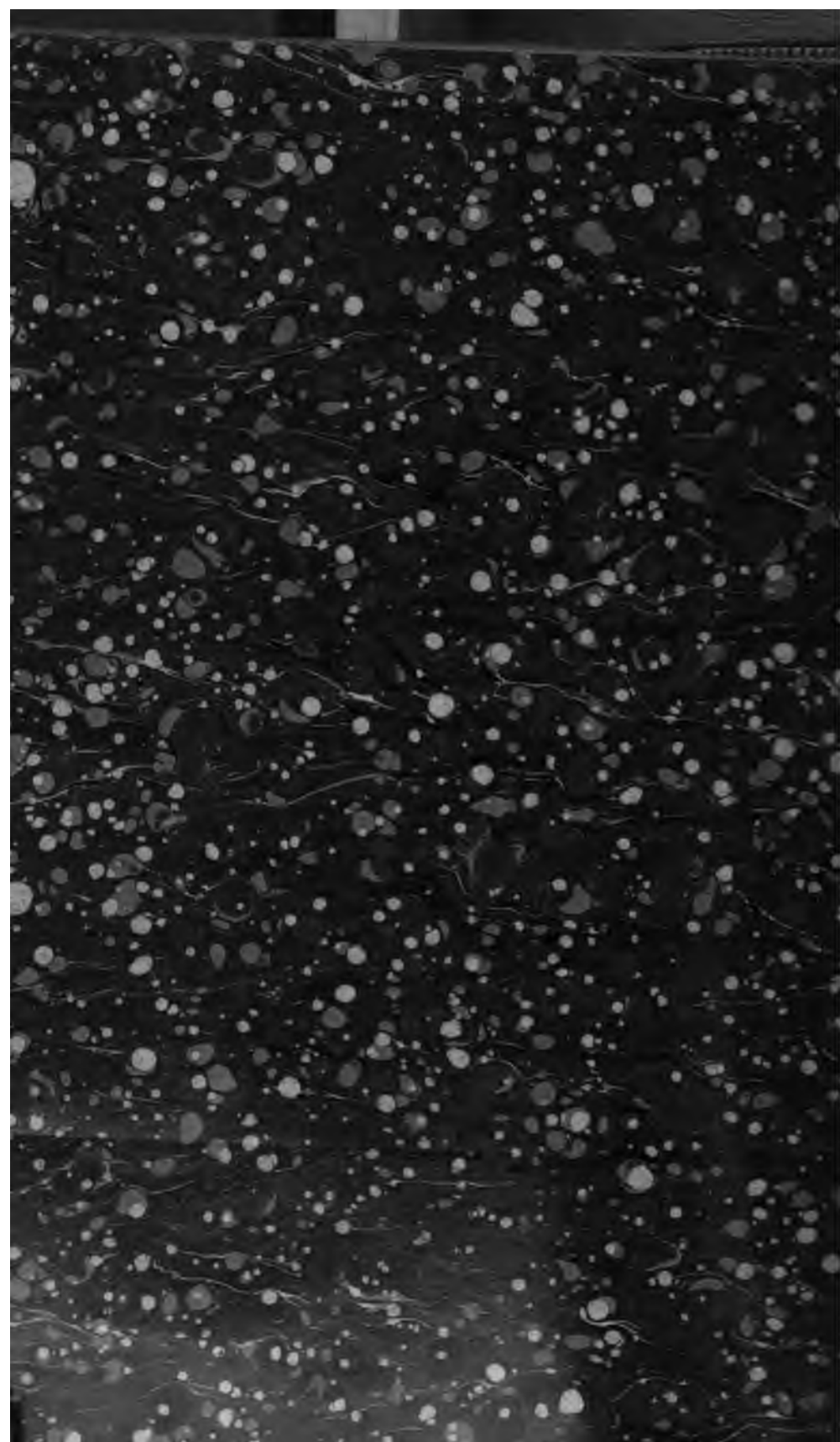


PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS. QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.











MAR 6 1969

